LIETUVOS UNIVERSITETO TECHNIKOS FAKULTETAS.

P. JANKAUSKAS, Dr. Inž,
Lietuvos Universiteto ordinar. profesorius.

KINEMATIKA
IR
DINAMIKOS PAGRINDAI

Paskaitos, skaitytos Lietuvos Universitete
1924—25 met.

Liet. Univer. Studentų Technikų D-jos spausdinys Nr. 16.

KAUNAS — Valstybės Spaustuvė. — 1926 m.

621

Eu 1639

KINEMATIKA IR DINAMIKOS PAGRINDAI.

Kinematika yra tai mechanikos dalis, nagrinėjanti įvairius judėjimus geometrijos atžvilgiu, nepaisydama tų judėjimų priežasčių.

Kinematikai, kaipo mokslui, pamatus padėjo Toričelli (XVIIa), J. Bernoulli (1742 momentinis centras), André Ampere (1843), pavadinęs mokslą apie judėjimus „kinematika". Toliau ją vystė L. Euler, M. Chasles, L. Poinsot, G. Coriolis ir daug kitų. Vokietis su francūziška pavarde F. Reuleaux savo klasiniam veikale „Teoretische Kinematik" davė racionalę mechanizmų klasifikaciją kinematikos pamatais.

Taško judėjimas gali būti tiesiaeigis arba kreivaeigis, pareina tat nuo kelio pavidalo, arba judėjimo traektorijos.

TIESIAEIGIS TAŠKO JUDĖJIMAS.

Jeigu pažymėsim (brėž. 1) raide S kelią, nueitą taško P savo tiesiąja traektorija AB laiku t, skaitant nuo pradinio taško A, tai taško judėjimo dėsnis gali būti pareikštas lygtimis:

$$S = f(t),$$

kur f reiškia bet kurią funkciją. Grafiniai šitas

judėjimo dėsnis vaizduojamas (brėž. 2) kreivosios DM koordinatų sistėmoje t (abscisų ašis) ir S (ordinatų ašis). Kad susekus taško P padėtį traektorijoje AB t laiku, reikia atidėti abscisą AC = t, išvesti atatinkamą ordinatą CM = S ir atidėti AP = S traektorijoj AB.

brėž. 1

Kalbamuoju taško judėjimo atvėju t=0 laiku, t. y. momentu, nuo kurio pradedamas laiko skaitymas, taškas randasi AK = S_0 nuotolyje nuo kelio pradinio taško A.

brėž. 2

Taške A bejudąs taškas P randasi laiku $t = -t_0$, vadinasi, t_0 sekundžių anksčiau laiko skaitymo pradžios.

TOLYGINIS TAŠKO JUDĖJIMAS.

Paprasčiausias taško judėjimo dėsnis, tai linijinis:

$$s = S_0 + vt$$

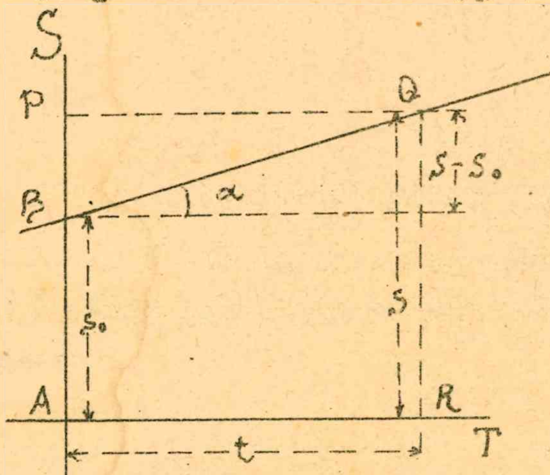
Vaizduojamas (brėž. 3) tiesiosios linijos BQ; kur S_0-const. ir v-const. Jeigu $t = 0$, tai $s = S_0$; jeigu $t = t$, tai $S = S_0 + vt$, reiškia t laiku išeinamas kelias $S - S_0$. Bet iš judėjimo lygčių

$$v = \frac{s - S_0}{t} = \frac{kelias}{laikas} = const = tg\alpha,$$

kur α tiesiosios BQ palinkimo į ašį t kampas. Dydis v vadinamas tolyginio judėjimo greitumu.

GREITUMAS x LAIKAS = KELIAS
(tolyginiam judėjimui).

Jeigu laikas t didės lygiais tarpais Δt, tai ir kelias s augs lygiais dydžiais $\Delta S = v \cdot \Delta t$, vadinasi, tolyginiai judėdamas taškas P lygiais laikotarpiais išeina vienodus kelius. Jeigu taško judėjimo lygtys bus:



brež. 3

$$s = S_0 - vt,$$

tai jos reiškia (brež. 4) atbulą taško P judėjimą traektorija AB nuo taško B iki A, taip, kad laikui bėgant, nuoto-

lis S mažėja. Čia greitumas $v = tg\alpha$ yra dydis neigiamas, kas reiškia nuotolio S mažėjimą laikui didėjant. Greitumas yra tai kelias, taško nuvyktas laiko vienetu.

Greitumas matuojamas greitumo vienetu =

$$= \frac{\text{vienetas ilgumo}}{\text{vienetas laiko}},$$

pavyždziui $\frac{\text{metras}}{\text{sekunda}}$; $\frac{\text{kilometras}}{\text{valanda}}$ ir t.t.

Vienas vienetas verčiamas kitu šitaip:

$$1\,\frac{\text{kilometras}}{\text{valanda}} = 1\,\frac{1000\text{ mtr.}}{3600\text{ sek.}} = \frac{10}{36}\,\frac{\text{metras}}{\text{sekunda}} =$$

$$= 0{,}28\,\frac{\text{metras}}{\text{sek.}}$$

NETOLYGINIS TAŠKO JUDĖJIMAS.

Jeigu taško P judėjimo tiesiąja traektorija dėsnis reiškiamas kreivosios linijos (brėž. 5):

$$s = f(t),$$

tai laikui t, išeitasai kelias bus $s = f(t)$; reiškia, laikotarpiu $t_1 - t$ išeinamas kelias yra $s_1 - S$.

Santykis

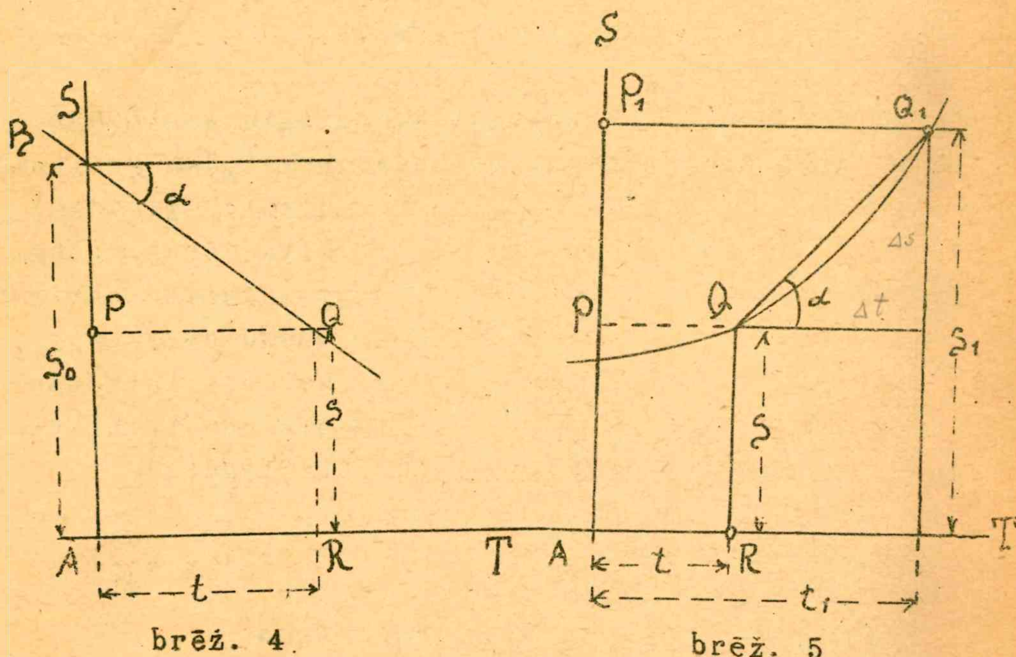
$$\frac{s_1 - S}{t_1 - t} = tg\alpha,$$

kuris tolyginiam judėjimui lygus $v = const.$, neto-

lyginiam yra dydis nepastovus ir vadinamas netolyginio judėjimo laikotarpiui t_1-t vidutiniu greitumu:

$$\frac{S_1-S}{t_1-t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = v_m$$

Riboje, kada $t_1-t = \Delta t$ artėja prie nulinaus, gau-



brēž. 4

brēž. 5

name (brēž. 6) tikrąjį greitumą v duotajam momentui t:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t) = tg\varphi,$$

kur φ - kampas, sudaromas liečiamosios kreivajai $s = f(t)$ taške (t, S) su gulščiąja koordinatų ašimi t.) Tokiu pūdu, jeigu

$$s = 1 + \frac{t^2}{4},$$

tai t laiku bus:

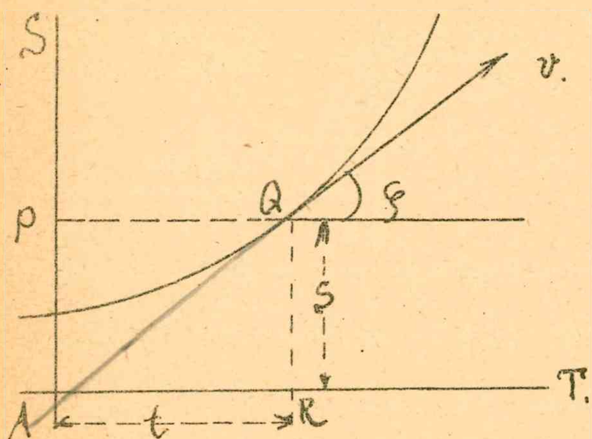
$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{t}{2}.$$

TAŠKO GREITUMO DĖSNIO GRAFINIS ATVAIZDAVIMAS.

Lygtys:

$$V = f'(t) = \psi(t)$$

reiškia (brėž. 7) kreivąją koordinatų sistėmoje t ir V. Šitą kreivąją galima pavadinti taško greitumo dėsniu. Žinodami šitą dėsnį, lengvai galime rasti taško nuvyktąjį kelią S laikotarpiu nuo t iki t_1; iš lygčių



brėž. 6

$$V = \frac{ds}{dt}$$

seka:

$$ds = Vdt = \psi(t)dt,$$

iš kur:

$$s = \int_t^{t_1} V.dt = \int_t^{t_1} \psi(t)dt = f(t_1) - f(t).$$

Reiškinys V dt yra tai elementarinis plotas tarp kreivosios $V = \psi(t)$, abscisų ašies t ir dviejų ordinatų V ir V + dV. Todėl integralas $\int_t^{t_1} Vdt$ rei-

škia plotą esantį tarp kreivosios $V = \psi(t)$, ordinatų V_1 ir V_2 ir abscisų ašies. Vadinasi, jeigu $V = 3t^2 \frac{m}{sek.}$, tai taško išeitasai kelias nuo $t = 0$ iki $t = 5$ sek. bus:

$$s = \int_0^5 3t^2\,dt = [t^3]_0^5 = 125 \text{ metrai.}$$

TIESIAEIGIS TOLYGINIO KITĖJIMO JUDĖJIMAS GREITĖJIMAS.

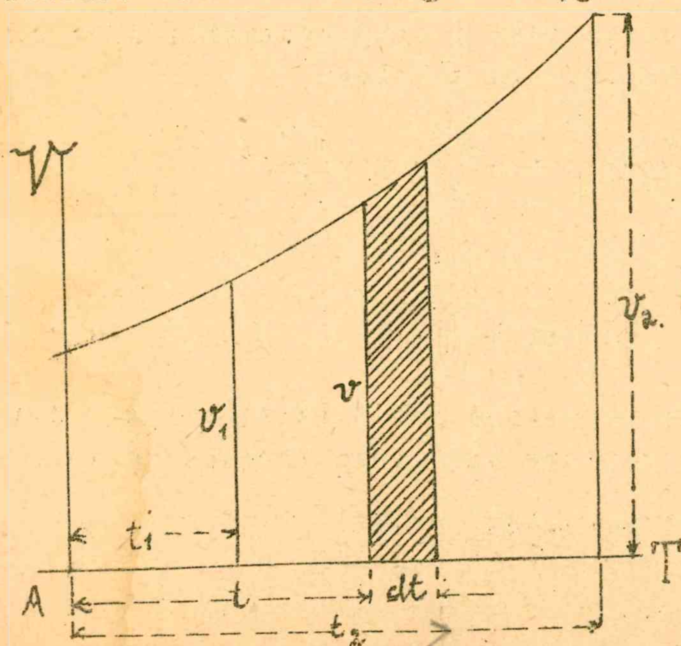
Paprasčiausias greitumo dėsnis tai linijinis:

$$V = V_0 + gt,$$

kuriam greitumas auga proporcingai laikui; greitumo padidėjimas per laiko vienetą

$$g = \frac{V - V_0}{t}$$

vadinasi taško tiesiaeigio tolyginio kitėjimo judėjimo greitėjimu. Jeigu g yra neigiamas, tai greitumo dėsnį galima parašyti šiaip:



brėž. 7

$$V = C - gt;$$

Greitumas mažėja proporcingai

laikui ir, g šiam atvējui vadinamas tolyginio kitėjimo judėjimo kitėjimu.

Tolyginio kitėjimo judėjimo greitumo diagrama turi pavidalą (brėž. 8) tiesiosios linijos

$$V = v_0 + gt,$$

kur V ir t kintamieji, o ir p pastovūs dydžiai, ir greitėjimas

$$p = \frac{V - v_0}{t} = tg\alpha,$$

kur α - kampas, sudaromas greitumo linijos BQ su abscisų ašimi t. Kelias S išeinamas taško tolyginio greitėjimo judėjimu per laiką t, sulig aukščiau pasakyto, vaizduojamas greitumo diagramoje plotu apibrėžtu tiesiosios BQ, dviejų ordinatų v_0 ir V, atatinkančių laikams t = 0 ir t = t ir abscisų ašies:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} . t$$

Suskirstę trapeciją ABQR į st šiakampainį ABNR su plotu $v_0 t$ ir trikampį BQN su plotu

$$t . \frac{v - v_0}{2} = t . \frac{pt}{2} = \frac{pt^2}{2},$$

gauname:

$$S = v_0 t + \frac{pt^2}{2} .$$

Pakeitę pirmoje formuloje del S laiką t lygiu jam reiškiniu $\frac{V - v_0}{p}$, randame dar vieną formulą keliui:

$$S = \frac{v_0 + v}{2} . \frac{v - v_0}{p} = \frac{v^2 - v_0^2}{2p} .$$

Tolyginio lėtėjimo judėjimui naudojamos tos pačios formulos, tik pakeičiant p į -p (brėž. 9) parodo greitumo diagramą). Iš formulos

$$p = \frac{v - v_0}{t}$$

matoma, kad greitėjimas matuojamas

$$\frac{\text{greitumas}}{\text{laikas}} = \frac{\text{ilgumo vienetas}}{(\text{laiko vienetas})^2}, \text{ pav. } \frac{\text{metras}}{(\text{sekunda})^2};$$

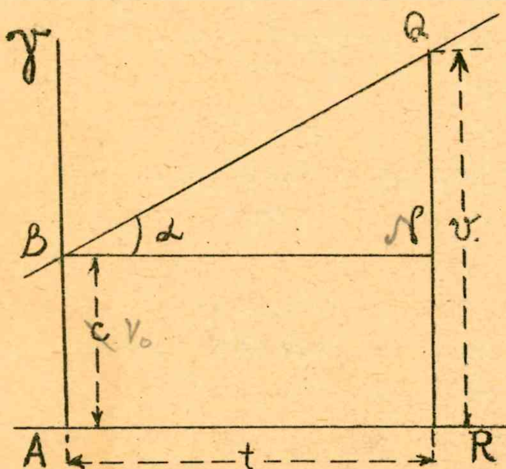
$$\frac{\text{kilometras}}{(\text{valanda})^2} \text{ ir t. t.}$$

Viunas vienetas verčiamas kitais šiaip:

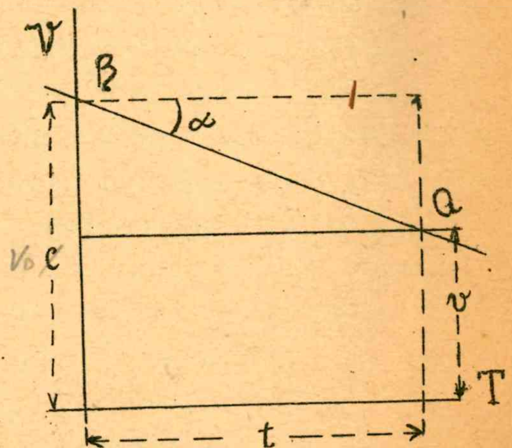
$$\frac{\text{kilm.}}{\text{val.}^2} = \frac{1000 \text{ mtr.}}{(36000 \text{ se}...} = \frac{1000 \text{ mtr.}}{(36000)^2 \text{sek}^2} =$$

$$= 0,000077 \frac{\text{metras}}{\text{sekunda}^2}.$$

Netolygingio greitėjimo tiesiasigis judėjimas bus tada, jeigu greitumas nepareiškiamas linijine

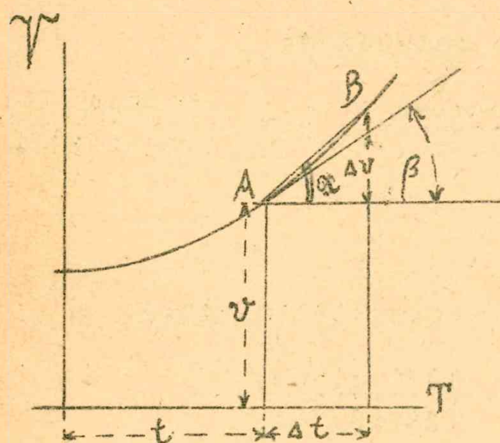


brėž. 8.



brėž. 9.

funkcija nuo t, o yra pet kokia kita funkcija $v = \phi(t)$. Tada (brēž. 10) kai kuriam laiko tarpui Δt, sekančiam už momento t, santykis $p_{M} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = tg\alpha$ vadinama viautiniu taško greitējimu laikotarpiui Δt ir greitumo diagramoje vaizduojamo kampo α, sudaryto chordos AB su abscisų ašimi, tangentu.



brēž. 10

Riboje, kada AB = 0, arba $\Delta t = 0$, šitas santykis atrodo šitaip:

$$p = \frac{dv}{dt} = tg\beta,$$

kur p vadinamas taško tiesiaeigio judējimo greitējimu momente t; jis lygus kampo β, sudaryto liečiamosios greitumo kreivajai $v = \psi(t)$ su abscisų ašimi, tangentui. Be to, dar galima parašyti:

$$p = \frac{dv}{dt} = \psi'(t) = f''(t) = \frac{d^2S}{dt^2} = S'' = v'$$

Iš čia seka: $dv = p.dt$.

Greitumo padidejimas per apibrēžtą laiko periodą t_1 t pasireikš:

$$\int_v^{v_1} dv = \int_t^{t_1} pdt, \text{ arba: } v_1 - v = \int_t^{t_1} pdt.$$

$$v = \int_0^t pdt.$$

Tokiu būdu, jeigu taško tiesiaeigio judējimo ǒēcnis reiskiamas lygčių

a

$$s = 2 + 3t^2 - \frac{t^3}{3},$$

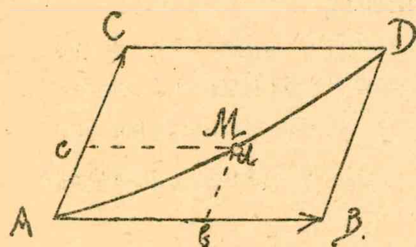
tai turēsime.

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t - t^2;$$

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = 6-2t.$$

TAŠKO KELIŲ VIENKARTINIŲ JUDĖJIMŲ SUDĖTIS.

Jeigu taškas M išeina laiku t kelią AB (brėž. 11), o tuo pačiu laiku linija AB drauge su tašku M pereina, likdama pati sau lygiagrečia, į padėtį CD, tai taškas M sienka sudėtiniu judėjimu AD, bendram atvējui kreivaeigiu.



brēž. 11

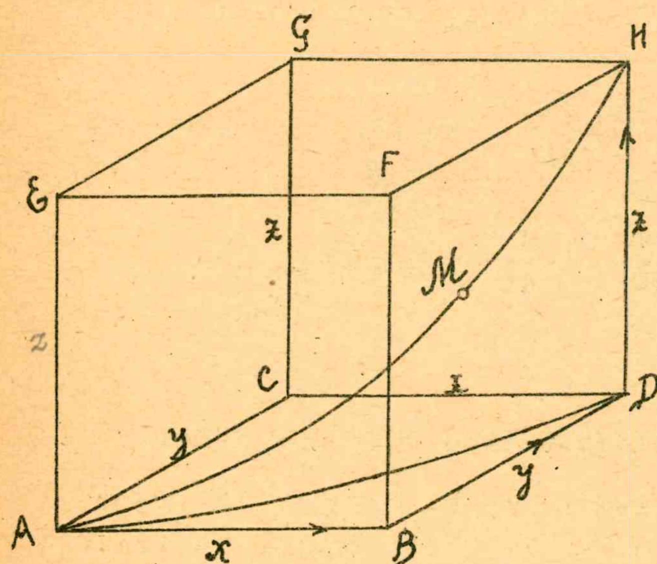
Taško M padētis D laiko t gale rasis, jeigu sudarysime judējimų AB ir AC lygiagretainį ir paimsime jo diogonalės tašką D, esantį priešais taško A.

Bet kokią taško M padētį jo traektorijoje AD rasime panašiu budu, geometriniai sudėdami du vienkartinius judējimus Ab išilgai linijos AB ir Ac - išilgai linijos AC.

Jei taškui krutant sudėtiniu judējimu AD (brēž. 12) patių sudedamųjų judējimų AB ir AC plokšmė pereina lygiagrečiai sau pačiai kryptimi AE į padētį EFGH, tai taškas M duotojo laikotarpio t pa

baigoj ateis į tašką H, esantį paralelepipedo, pastatyto iš trijų sudedamųjų slenkimų AB = x, AC = y ir AE = z, diagonalės gale, arba kitais žodžiais, rasis erdvinio daugiakampio ABDH, sudaryto (bet kokia tvarka) iš slenkimų x, y, z, gale.

Bendrai imant traektorija AH bus erdvės kreivoji.



brėž. 12

GREITUMŲ SUDĖTIS.

Jeigu taškas M (brėž. 13) kruta sudėtiniu judėjimu, susidarančiu iš dviejų tolyginių ir tiesiaeigių judėjimų su greitumu w (kryptimi AB) ir u (kryptimi AC) tai keliai taško iseiti šiomis kryptimis per t sek. bus:

$$AB = wt_1, \quad AC = ut_1.$$

Taško vieta laiko t gale bus D, gale laiko t_1 - D_1, tuo tarpu

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}, \quad \overline{AD_1} = \overline{AB_1} + \overline{B_1D_1}.$$

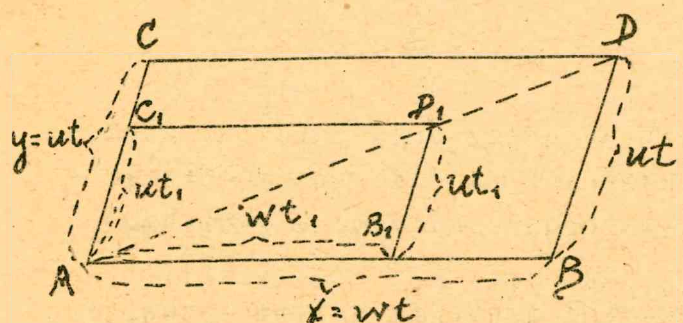
Bet. $\frac{AB}{AB_1} = \frac{t}{t_1}$, $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{t}{t_1}$, reiškia $\frac{AB}{AB_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$.

vadinasi linija AD_1D yra tiesioji ir todel

$$\frac{AD}{AD_1} = \frac{t}{t_1},$$

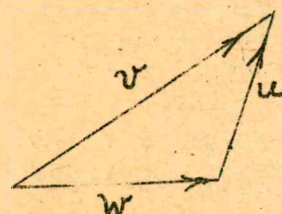
t.y. keliai AD ir AD_1, taško išeinami sudetiniu judējimu proporcingi laikams.

Tokiu budu mes matome, kad taško sudētinis judējimas yra tiesiaeigis, tolyginis su greitumu v, kurį gausime paēme $t_1 = 1$ sek. ir rasime taško kelią; tada $AB_1 = w$, $AC_1 = u$, $AD_1 = v$, t.y. sudetinio judējimo greitumas lygus geometrinei sudedamųjų judējimų greitumų sumai, arba lygus lygiagretainio, sudaryto iš tų greitumų, diagonalei (brēž. 14).



brēž. 13

Jeigu turime taško sudētinį judējimą, sudarytą iš dviejų tiesiaeigių, bet netolyginių judējimų, kuriuose $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, tai taško traektorija yra, benarai imant kreivoji.



brēž. 14

Nagrinēdami šitos traektorijos elementą ds (brēž. 15), susidarantį iš dviejų elementų dx, dy ir žymēdami sudedamųjų judējimų greitumus taškuose x ir y per w ir u, turēsime:

$$dx = w dt, \quad dy = u dt;$$

beto dar ds = vdt, jeigu v yra sudėtiniojo judėjimo greitumas. Bet iš braižinio matoma, kad

$$\overline{ds} = \overline{dx} + \overline{dy}, \text{ arba:}$$

$$\overline{v}dt = \overline{w}dt + \overline{u}dt,$$

arba padalijį iš *dt*:

$$\overline{v} = \overline{w} + \overline{u}.$$

Tokiu būdu, šitam bendram taško judėjimo nuotikiui sudetinio kreivaeigio judėjimo greitumas taipgi lygus geometrinei sudedamųjų greitumų sumai.

Sudetinio judejimo greituma galima apskaičiuoti ir analitiniai (brėz. 16); pavadinę α kampą tarp w ir u, turėsime:

$$v^2 = u^2 + w^2 + 2uw\cos\alpha.$$

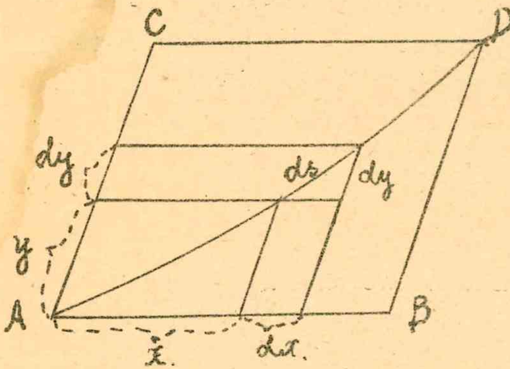
Kampą φ tarp v ir w rasime iš lygčių

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{u}{v} \quad \sin\varphi = \sin\alpha \cdot \frac{u}{v}.$$

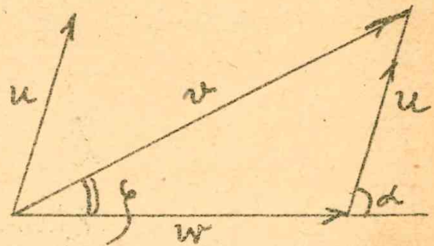
Jeigu α = 0, tai v = w + u, φ = 0; jeigu α = 180°, tai v = w - u, φ = 0; (jeigu w > u; jeigu α = 90°, tai $v = \sqrt{w^2 + u^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{u}{w}$ (brėž. 17).

Tokiu pat būdu randame, kad jeigu taško judėjimas susidaro iš 3-jų judėjimų kryptimis AB, AC ir AE, nesutampančiomis vienon plokšmėn (brėž. 18), tai taško sudetinio judėjimo greitumas v, kokioje nors padetyje M, kurios koordinatos yra x, y, z, surandamas iš geometrinės lygybės: $\overline{ds} = \overline{dx} + \overline{dy} + \overline{dz}$,

kur ds - taško elementarinis persislenkimas jo trajektorija AB laiko elemente dt; dx, dy, dz - šito



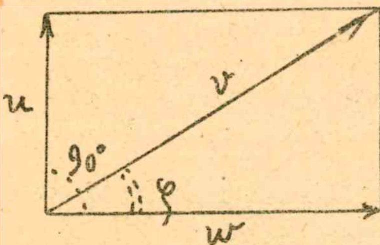
brėž. 15



brėž. 16

persislenkimo kryptimis AX, AY, AZ, sutampančiomis su duotosiomis kryptimis AB, AU ir AE sudarančiosios

Kadangi ds = vdt, dx = wdt, dy = udt, dz = σdt tai $\bar{v} = \bar{w} + \bar{u} + \bar{\sigma}$, vadinasi sudėtinio judėjimo iš 3-jų sudedamųjų greitumas lygus geometrinei sudedamųjų judėjimų greitumų sumai, arba paralelepipedo, pastatyto iš tų greitumų, kaipo briaunų, diagonalei. Jeigu trys sudarantieji greitumai w, u ir σ tarp savęs statmeni, tai sudėtinis greitumas v randamas šiaip: $v = \pm\sqrt{w^2+u^2+\sigma^2}$, o jo kampų, sudarytų su stačiosios koordinatų sistėmos ašimis OX, OY, OZ kosinusai bus:



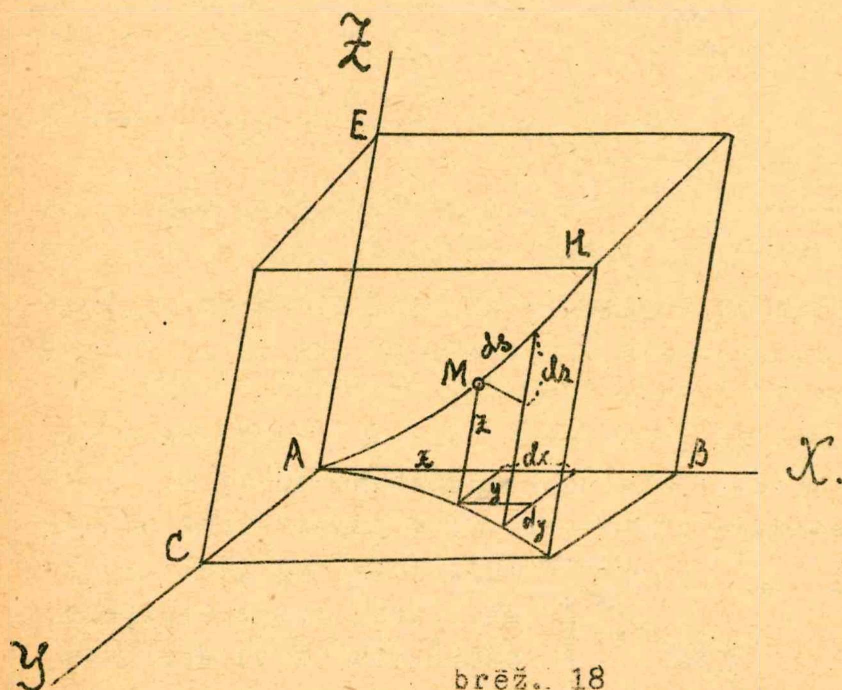
brėž. 17

$$\cos\alpha = \frac{w}{v}; \quad \cos\beta = \frac{u}{v}; \quad \cos\gamma = \frac{\sigma}{v} .$$

a

GREITĒJIMŲ SUDĒTIS.

Tegu taškas M (braiž. 19) juda sudetiniu judējimu, sudarytu iš dviejų tolyginio greitējimo tiesia-



brēž. 18

eigių judējimų AB ir AC su greitējimais p ir q; keliai AB ir AC išeiti per t sekundų bus:

$$AB = \frac{pt^2}{2}; \quad AC = \frac{qt^2}{2} = BD,$$

Keliai išeiti per t_1 sek., kur $t_1 < t$, bus:

$$AB_1 = \frac{pt_1^2}{2}, \quad AC_1 = B_1D_1 = \frac{qt_1^2}{2}.$$

Taško vietos išejus t_1 ir t sek. yra D_1 ir D, o kadangi

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{BD}{B_1D_1},$$

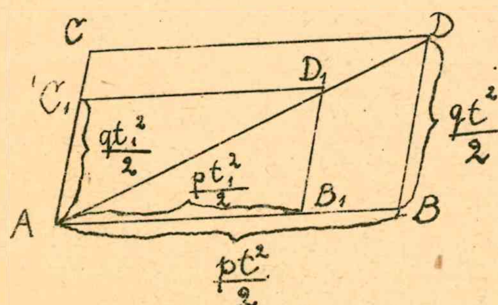
tai AD_1D yra tiesioji linija, vadinasi, sudėtinis judėjimas taipogi tiesiaeigis; be to, kadangi

$$\frac{AD}{AD_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{t^2}{t_1^2},$$

tai taško išeitojo kelio ilgumas AD proporcingas laiko t kvadratui, reiškia, gali būti pareikštas formula:

$$AD = \frac{rt^2}{2},$$

kur r – taško sudėtinio judėjimo greitėjimas. Tuo būdu mes matome, kad sudėtinis judėjimas yra tiesiaeigis ir tolyginio greitėjimo, kaip ir sudarantieji.



brėž. 19

Paimsime t_1 tokį, kad $\frac{t_1^2}{2} = 1$, tada $AB_1 = p$, $AC_1 = q$, $AD_1 = r$ ir gausime sekančią teoremą: sudėtinio judėjimo greitėjimas yra lygiagretainio, pastatyto iš sudarančiųjų judėjimų greitėjimų, diagonalė, arba yra jų geometrinė suma. Tai teisinga sudėtiniam judėjimui tik pareikštam dėsnyje:

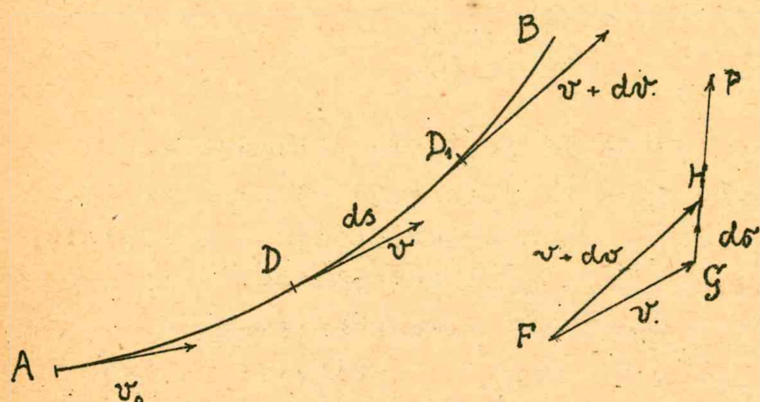
$$s = \frac{pt^2}{2};$$

esant kitai judėjimo formai, pavyzdžiui,

$$s = ct + \frac{pt^2}{2},$$

sudėtinis judėjimas gaunamas kreivaeigis, kuriam reikia duoti naują, bendresnį greitėjimo apibūdinimą. Taško bet kokio judėjimo greitėjimu vadinamas bendrai jo greitumo (dydžio bei krypties) geometrinis pakitėjimas per sekundą.

Jeigu taškas (brėž. 20) turi vietoje D greitumą v, o D_1 - išėjus laikui dt - greitumą v+dv (lankas DD_1 = ds), tai atidėję iš vieno taško F abu tuos greitumu, matome, kad atkarpa $\overline{GH}$= = $\overline{v+dv-v}$ reiškia greitumo v geometrinį padidėjimą arba pakitėjimą per laiką dt. Pavadinę elementarinį greitėjimą GH per dσ, turėsime: dσ = pdt, iš kur greitėjimas



brėž. 20

$$p = \frac{d\sigma}{dt},$$ greitėjimo krypčiai sutampant su kryptim SH = dσ.

Jeigu iš bet kurio taško O (brėž. 21) atidėti greitumų kryptis ir didumus, kuriuos taškas turi įvairiose savo padėtyse traektorijoje AB, tai gausis kreivoji ADD_1B_1 vadinamoji greitumo godografu; tosios kreivosios lanko σ elementas DD_1, atatinkąs taško perslenkimui traektorija AB iš D į D_1, matomai lygus dσ, o santykis $\frac{d\sigma}{dt}$ = p reiškia šito

taško, kuris judės godografo lanku σ, greitumą; tokiu būdu galima pasakyti, kad taško judėjimo greitėjimas yra taško, išeinančio tuo pačiu laiku atatinkantį greitumo godografą, greitumas.

Tegu turime taško sudėtinį judėjimą (brėž. 22) sudarytą iš dviejų kokių nors tiesiaeigių judėjimų

brėž. 21 brėž. 22

su greitumais w ir u ir su greitėjimais p ir q. Tada: $p = \frac{dw}{dt}$, $q = \frac{du}{dt}$; (nes judėjimas tiesiaeigis). Taško greitumą momentui t rasime: $\overline{v} = \overline{w}+\overline{u}$; taško greitumas momentui t+dt bus: $\overline{v+dv} = \overline{w+dw+u+du}$. Išbrėžę iš vieno taško A greitumus v ir v + +dv ir jų sudedamuosius matysime, kad: $\overline{DD_1} = \overline{d\sigma} = \overline{dw}+\overline{du}$, arba, padalę abi pusi iš dt: $\overline{r} = \overline{p}+\overline{q}$, kur $r = \frac{d\sigma}{dt}$ yra taško sudėtinio judėjimo greitėjimas.

Tuo būdu bet kurių sudėtinių judėjimų greitėjimai sudedami, kaip ir greitumai, lygiagretainio ir paralelepipedo taisyklėmis.

KREIVAEIGIŲ JUDĖJIMŲ SUDĖTIS.

Jeigu taškas juda kreivąja AB (brėž. 23), kuri slenka pati sau lygiagrečiai, taip, kad pradinis jos taškas A aprašo kreivąją AC, tai taško tikrasai kelias bus kai kuri kreivoji AD, taško išeina-

ma per laiką t, kuriuo jis nuvyksta kelią AB savo traektorija, o pati traektorija pereina sau lygiagrečiai į padėtį CD. Taško padėtis D gali būti surasta su pagalba lygiagretainio, $ABCD$, sudaryto iš stygų, suveriančiųjų kreivasias traektorijas; todel kreivaeigių judėjimų sudėtis daroma ta pačia lygiagretainio taisykle.

Kada taškas randasi savo tikrosios traektorijos kuriame nors taške D_1, tai jo judėjimas susidaro iš judėjimų kreivųjų C_1D_1 ir B_1D_1 elementais, kuriuos deliai jų mažumo galima skaityti tiesiosiomis; todel sudėtinio judėjimo greitumas v yra lygiagretainio, sudaryto iš sudedamųjų judėjimų greitumų w ir u, diagonalė (brėž. 24).

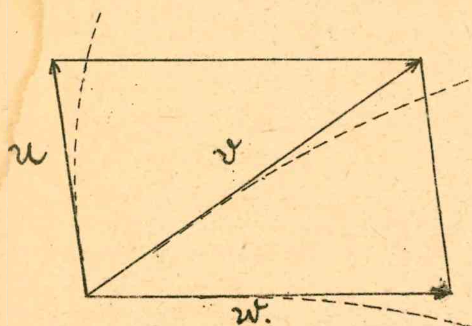
brėž. 23

Tą pat galima pasakyti apie sudėtį greitėjimų tokių kreivaeigių judėjimų, kuriuose traektorijų slenkimas vyksta lygiagrečiai joms pačioms.

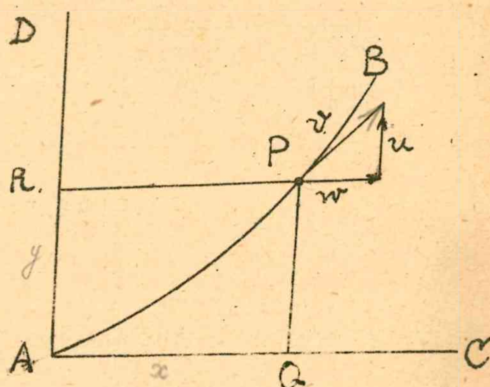
Judėjimų, greitumų ir greitėjimų išskaidymas dviem (plokšmėje) arba trimis (erdvėje) duotomis kryptimis atliekamas vaduojantis tomis pačiomis lygiagretainio ir paralelepipedo taisyklėmis. Pavyzdžiui, jeigu duota (brėž. 25) taško P judėjimo kreivoji traektorija AB, tai šitą judėjimą galima pakeisti dviem sudedamaisiais judėjimais kokiomis nors duotomis kryptimis AC ir AD, parinkus tų tiesiaeigių judėjimų dėsnius taip, kad kiekvienam laiko momentui t koordinatos taško P, būtent $AQ = x$ ir $AR = y$ duotų tą pačią taško P

padētį kreivojoje AB, kaip ir taško P judējimo dēsnis kreivąja $s = f(t)$.

Taško P greitumas v laiko momente t, apibrēžiančiame sudedamųjų judējimų koordinatas x ir y, rasis iš geometrinēs lygybēs: $\overline{ds} = \overline{dx}+\overline{dy}$; padale abi



brēž. 24



brēž. 25

pusi iš dt, turēsime: $\overline{v} = \overline{w}+\overline{u}$, vadinasi absoliutinio judējimo greitumas v išsisklaidē lygiagretainio taisykle į sudedamųjų judējimų greitumus w ir u. Kreivaeigį judējimą patogiausia tyrinēti išsklaidžius jį dviem statmenais judējimais koordinatų ašių AX ir AY kryptimis (brēž. 26). Taško P koordinatos privalo būti pareikštos laiko funkcijomis: $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$. Tada taško v sudedamieji greitumai w ir u koordinatų ašimis, arba, kas vistiek, šito greitumo v projekcijos į koordinatų ašis bus: $dx = w \cdot dt$ $dy = u\, dt$

$$w = v_x = \frac{dx}{dt}; \quad u = v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v = +\sqrt{v_x^2+v_y^2} =$$

$$= +\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dt} = \frac{ds}{dt}; \quad tg\alpha = \frac{v_y}{v_x} =$$

$$= \frac{dy}{dx}; \quad \cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{dx}{ds}; \quad \sin\alpha = \frac{v_y}{v}.$$

$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \frac{v^2}{\rho} = 0$

$v = const. \quad \rho = \infty$

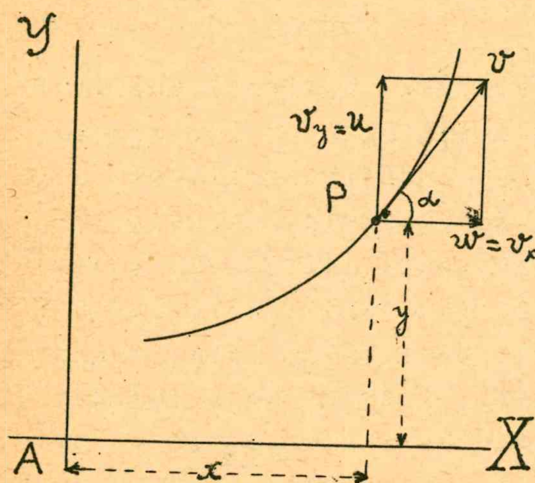
Taško tikrojo greitējimo p sudedamuosius arba projekcijas į koordinatų ašis galima parašyti:

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};\quad p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};\quad p = +\sqrt{p_x^2+p_y^2} =$$

$$= +\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2};\quad tg\varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}};\quad \cos\varphi = \frac{p_x}{p};$$

$$\sin\varphi = \frac{p_y}{p},$$

kur φ kampas, sudaromas greitējimo p su ašimi AX.



brēž. 26

Jeigu taškas kruta erdvēse kre erdvēse kreivąja, tai jo judējimas išsklaidomas trimis tiesiaeigiais stačiųjų koordinatų AX, AY, AZ kryptimis. Jeigu taško koordinatos yra: x = f(t); y = φ(t); z = = ψ(t), tai turēsime:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f'(t);\quad v_y = \frac{dy}{dt} = \varphi'(t);\quad v_z = \frac{dz}{dt} =$$

$$= \psi'(t);\quad v = +\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = \frac{ds}{dt};$$

kampus α, β, γ greitumo v sudaromus su ašimis AX,

AY, AZ surasime šiaip:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{dx}{ds};\quad \cos\beta = \frac{v_y}{v} = \frac{dy}{ds};\quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{dz}{ds}.$$

Tuo pačiu būdu surandamos greitėjimo p projekcijos ir kampai λ, μ, γ, sudaromi jo su koordinatų ašimis AX, AY, AZ:

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};\quad p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};\quad p_z = \frac{dv_z}{dt} =$$

$$= \frac{d^2z}{dt^2};\quad p = +\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2};\quad \cos\lambda = \frac{p_x}{p};\quad \cos\mu =$$

$$= \frac{p_y}{p};\quad \cos\gamma = \frac{p_z}{p}.$$

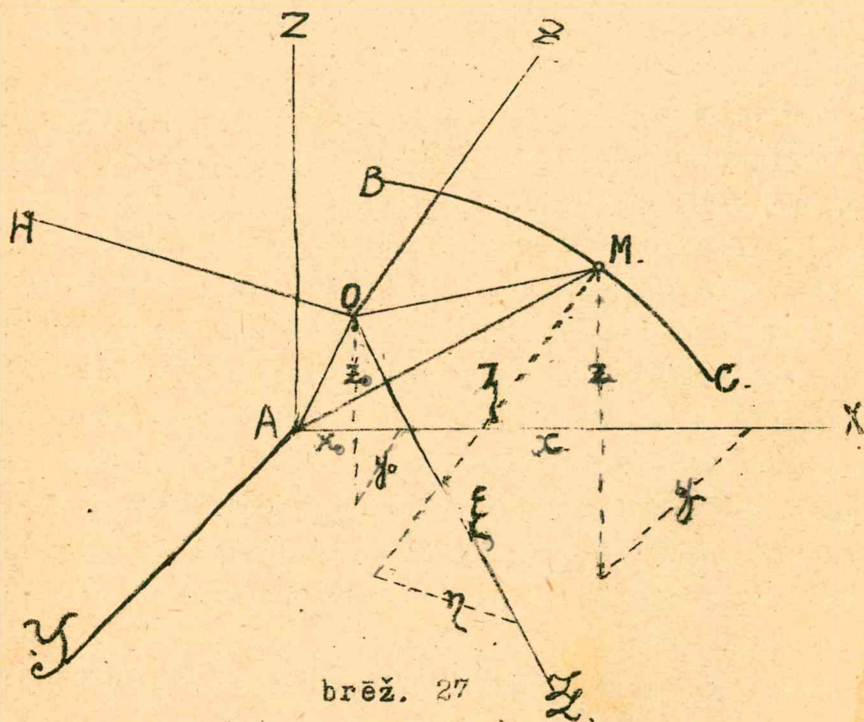
TAŠKO SUDĖTINIO JUDĖJIMO ANALITINIS APIBUDINIMAS.

Taško **M** judėjimas judančiąja kreivąja BC brėž. 27 vadinasi reliatyviu judėjimu šita kreivąja, o pačios kreivosios BC judėjimas translGiacijos judėjimu reliatyviosios traektorijos. Jeigu šitas transliacijos judėjimas vyksta taip, kad traektorija BC visą laiką liekasi pati sau lygiagretė, tai jis vadinamas žengimo judėjimu (lygiagrečio slenkimo vok. Verschiebung). Taško **M** tikrasis judėjimas erdvėje abiejuose atvėjuose yra reliatyvaus ir transliacijos judėjimų sudėties rezultatas ir vadinamas absoliutiniu. Mes žymėsime absoliutines taško koordinatas erdvėje nejudamos stačiosios koordinatų ašių AXYZ sistėmos atžvilgiu per x, y, z, judamą reliatyvią traektoriją BC įsivaizdinsime sau pastoviai surištą su judama stačiąja koordinatų ašių OΞHZ sistėma ir reliatyvios traektorijos

taškų koordinatas pažymėsime per ξ, η, ζ. Tegu taško M judėjimas reliatyvia traektorija yra žinomas, vadinasi yra duotos taško reliatyvios koordinatos kiekvienam laikui t, arba funkcijos:

$$\xi = \Phi_1(t), \quad \eta = \Phi_2(t), \quad \zeta = \Phi_3(t)$$

be to, tegu bus dar žinomas judamosios sistēmos OΞHZ judējimas nejudamos sistēmos AXYZ atžvilgiu, vadinasi, kiekvienam duotajam momentui yra žinomi judamosios koordinatų sistēmos OΞHZ pradžios O absoliutinēs koordinatos $x_0 = f_1(t)$, $y_0 = f_2(t)$, $z_0 = f_3(t)$ ir kampai, sudaromieji judamomis koordinatų ašimis su nejudamosiomis; tada taško M absoliutinēs koordinatos surandamos iš analitinēs geometrijos formulų, gaunamų, jeigu regima geometrinē lygybē (brēž. 27)



brēž. 27

$$\overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM}$$

arba $\overline{x}+\overline{y}+\overline{z} = \overline{x}_0+\overline{y}_0+\overline{z}_0+\overline{\xi}+\overline{\eta}+\overline{\zeta}$

suprojektuoti į ašis AX, AY, ir AZ:

$$x = x_0+\xi\cos(\xi x)+\eta\cos(\eta x)+\zeta\cos(\zeta x)$$

$$y = y_0+\xi\cos(\xi y)+\eta\cos(\eta y)+\zeta\cos(\zeta y)$$

$$z = z_0+\xi\cos(\xi z)+\eta\cos(\eta z)+\zeta\cos(\zeta z)$$

Iš tų pačių lygčių gaunami reiškiniai taško M projekcijoms absoliutiniam greitumui ir absoliutiniam greitėjimui, jeigu esančius antrose dalyse kosinusus pareikšti laiko funkcijomis.

Judant judamai sistēmai (arba kietam kūnui) OΞHZ, josios pradžios O koordinatos x_0 y_0 z_0 gali mainytis nepareidamos viena nuo kitos; gi devynių kampų, sudaromų ašių Ξ, H, Z su ašimis X, Y, Z kosinusai surišti tarp saves 6-mis lygtimis, išreiškiančiomis sąryšį tarp pakraipos kampų kosinusų paimtoje stačioje koordinatų sistēmoje. Jeigu trumpumo deliai pažymēsime:

$$\cos\xi x = \alpha_1 \quad \cos\xi y = \beta_1 \quad \cos\xi z = \gamma_1$$

$$\cos\eta x = \alpha_2 \quad \cos\eta y = \beta_2 \quad \cos\eta z = \gamma_2$$

$$\cos\zeta x = \alpha_3 \quad \cos\zeta y = \beta_3 \quad \cos\zeta z = \gamma_3$$

tai šitas 6-rias lygtis galima parašyti:

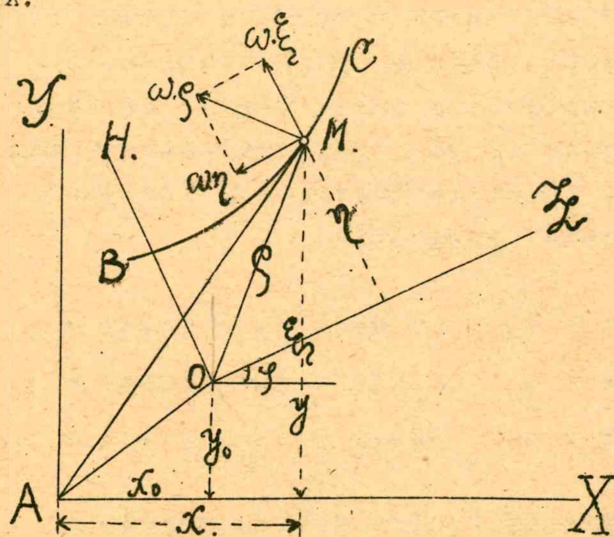
$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = 1 \qquad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 1$$

$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 = 1 \qquad \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 = 1$$

$$\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2 = 1 \qquad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2 = 1$$

Tokiu būdu iš devynių kampų tik trys gali mainytis nepareidami vienas nuo kito. Paprastai nepareinančiais vienas nuo kito kampais imami t.v. Eilerio kampai θ, φ, ψ (žiur. toliau), o visi kiti kampai tarp koordinatų ašių išreiškiami jų funkcijomis. Tokiu būdu judamos sistēmos $\xi H \zeta$ (arba kieto kūno), kuriai priklauso reliatyvioji traektorija BC, judējimas apibrēžiamas 6-šių nepriklausomų dydžių x_0, y_0, z_0, θ, φ, ψ, kurie gali būti duoti, kaip bet kokios laiko t funkcijos.

Jeigu turime plokščiosios sistēmos $O\xi H$ su traektorija BC judējimą (brēž. 28), tai josios padētis nejudamos koordinatų sistēmos AXY atžvilgiu apibrēžiama trijų nepriklausomų dydžių: taško O koordinatų x_0, y_0 ir kampo φ, sudaryto ašies $O\xi$ su ašimi AX.



brēž. 28

Suprojektavę geometrinę lygybę:

$$\overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM} \quad \text{arba}$$

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{x}_0 + \bar{y}_0 + \bar{\eta} + \bar{\xi}$$

į ašis AX ir AY, mes gauname:

$$x = x_0 + \xi\cos(\xi x) + \eta\cos(\eta x)$$

$$y = y_0 + \xi\cos(\xi y) + \eta\cos(\eta y)$$

Pastebėję, kad:

$$\sphericalangle(\xi x) = \varphi, \quad \sphericalangle(\eta x) = 90^\circ + \varphi$$

$$\sphericalangle(\xi y) = 90^\circ - \varphi, \quad \sphericalangle(\eta y) = \varphi,$$

galūtinai randame:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ y &= y_0 + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi \end{aligned}\right\} A$$

Taško M absoliutinis judėjimas bus žinomas, vadinasi bus žinomos jo absoliutinės koordinatos x ir y, jeigu kiekvienam laiko momentui bus žinomi dydžiai x_0, y_0, φ, ξ, η, reiškia, jeigu bus duotos sekančios, viena iš kitos nepareinančios funkcijos.

$$x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t), \quad \xi = \Phi_1(t),$$

$$\eta = \Phi_2(t).$$

P a v y z d i s 1-as. Taškas M juda tiesiaeigiai ir tolyginiai judamoje sistēmoje ΞOH, o šita pastaroji tolygiai sukasi apie nejudamą tašką O, kurio koordinatos yra x_0 = const. ir y_0 = const. Sudaryti taško M absoliutinio judėjimo lygtis. Taško reliatyvus judėjimas sistēmoje ΞOH išreiškiamas 1 - jo

laipsnio lygtimis:

$$\xi = a+bt; \quad \eta = c+dt.$$

Jeigu judamoji sistēma tolyginiai sukasi apie nejudamą tašką O, tai kampas φ padidėja per sekundą vienu tuo pačiu dydžiu ω, vadinamu kampiniu greitumu; jeigu judėjimo pradžioje kampas φ buvo lygus nuliui, tai laikui t kampas φ išreiškiamas formula:

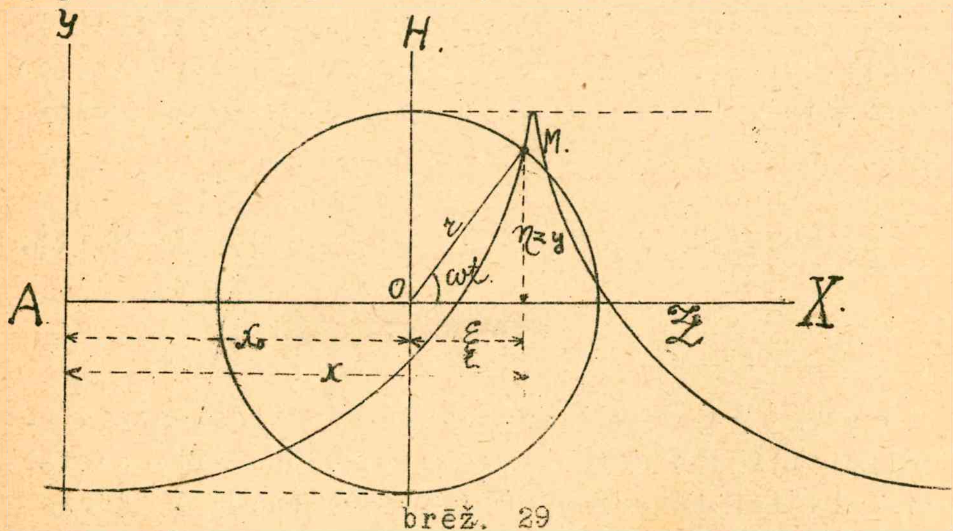
$$\varphi = \omega t.$$

Pastatę šituos dydžius į anksčiau išvestąsias formulas, gausime:

$$x = x_0 + (a+bt)\cos(\omega t) - (c+dt)\sin(\omega t)$$

$$y = y_0 + (a+bt)\sin(\omega t) + (c+dt)\cos(\omega t)$$

Jeigu reliatyvioji tiesioji traektorija eina per



brēž. 29

tašką O, tai a = O ir c = O, o taškas M absoliutiniai judėdamas aprašo Archimedo spiralę apie tašką O.

P a v y z d i s 2. Taškas M juda tolyginiai spindulio

r apskritimu, priklausančiu plokščiajai sistēmai $\xi O\eta$, kuri juda savo plokšmēje tiesiaeigiu tolyginiu žengimo judējimu. Sudaryti taško absoliutinio judējimo lygtis. Paimsime judamosios koordinatų sistēmos pradžią O apskritimo centre, o ašis $A\xi$ ir $A\xi$ sutampančias ir lygiagretes žengimo judējimui (brēž. 29). Tada, pavadinę taško reliatyvaus judējimo apskritimu kampinį greitumą ω (kampą išeinamą per sekundą radiuso vektorio OM), rasime taško radiuso vektorio aprašytą per t sekundų kampą, lygų ωt, vadinasi, taško reliatyvios koordinatos bus:

$$\xi = r.\cos(\omega t), \quad \eta = r.\sin\omega t$$

$$x_0 = a+bt, \quad y_0 = 0, \quad \varphi = 0$$

Todel:

$$x = a+bt+r.\cos(\omega t)$$

$$y = r.\sin(\omega t)$$

Taškas M aprašo kreivąją, vadinamą trochoida, atskirais atvējais cikloida (jeigu $b = r.\omega$).

Jeigu judamoji erdvēs sistēma $O\xi\eta\zeta$ arba plokščioji $O\xi\eta$ su taško M reliatyvia traektorija BC juda žengiamai, tai kampai tarp judamų ašių $\xi\eta\zeta$ ir nejudamų XYZ (ar tarp ašių $\xi\eta$ ir XY) arba Eilerio kampai θ, φ, ψ liekasi pastovūs ir visi judamosios sistēmos taškai duotame momente turi geometriniai lygius greitumus (t.y. sulig didumo ir pakraipos) ir geometriniai lygius greitējimus, tokius pat, kaip taškas O. Šitame atsitikime, paēmę pirmą išvestinę sulig laiko iš reiškinių taško M absoliutinēms koordinatoms, rasime (plokščiam žengimo judējimui, kada φ = const.):

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{dx_\Omega}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\cos\varphi - \frac{d\eta}{dt}\sin\varphi$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \frac{dy_\Omega}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\sin\varphi + \frac{d\eta}{dt}\cos\varphi$$

Čia $\frac{dx_\Omega}{dt}$ ir $\frac{dy_\Omega}{dt}$ yra sistēmos $O\Xi H$ žengimo greitumo u projekcijos į X ir Y, $\frac{d\xi}{dt}$ ir $\frac{d\eta}{dt}$ taško reliatyvaus judējimo traektorija BC greitumo w projekcijos į Ξ ir H, todel šitas lygtis galima parašyti taip:

$$v_x = u_x + w_\xi\cos\varphi - w_\eta\sin\varphi$$

$$v_y = u_y + w_\xi\sin\varphi + w_\eta\cos\varphi$$

Kadangi w_ξ nukreiptas išilgai ašies $O\Xi$, o w_η - išilgai ašies OH, tai šitos lygtys reiškia geometrinę lygybę:

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w},$$

kame v - taško M absoliutinis greitumas

w - taško M reliatyvus greitumas traektorija BC

u - traektorijos BC žengimo judējimo greitumas.

Paēmę antrą išvestinę iš reiškinių taško absoliutinēms koordinatoms (plokščiajam žengimo judējimui), rasime:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_x = \frac{d^2x_\Omega}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dt^2}\cos\varphi - \frac{d^2\eta}{dt^2}\sin\varphi$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = p_y = \frac{d^2y_\Omega}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dt^2}\sin\varphi + \frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\varphi.$$

Bet $\frac{d^2x_\Omega}{dt^2}$ ir $\frac{d^2y_\Omega}{dt^2}$ yra sistēmos $O\Xi H$ žengimo judējimo greitējimo r projekcijos į X ir Y, $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ ir $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ taško reliatyvaus judējimo traektorija BC greitējimo q projekcijos į Ξ ir H; todel šitas lygtis galima parašyti:

$$p_x = r_x + q_\xi \cos\varphi - q_\eta \sin\varphi$$

$$p_y = r_y + q_\xi \sin\varphi + q_\eta \cos\varphi$$

Greitējimai q_ξ ir q_η nukreipti atatinkamai išilgai ašių $O\Xi$ ir OH, todel pastarosios lygtys išreiškia sekančią geometrine lygybe:

$$\bar{p} = \bar{r} + \bar{q}$$

kame p - taško M absoliutinis judējimo greitējimas

r - traektorijos BC žengimo judējimo greitējimas

q - taško M reliatyvaus judējimo traektorija BC greitējimas.

Daleisime dabar, kad sistēmos, $O\Xi H Z$, kuriai priklauso traektorija BC, judējimas bus ne žengimo, o bet koks su kintamais kampais θ, φ, ψ, apibrēžiančiais ašių Ξ, H, Z kryptis. Prastumo deliai, paimsime judējimą plokščią, su kintamuoju kampu φ tarp ašių AX ir $O\Xi$ ir gausime, išeidami iš taško M greitumo v projekcijų į AX ir AY absoliutinio judējimo (A) lygčių, paēmę pirmąsias išvestines iš x ir y sulig t:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{dx_\Omega}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\cos\varphi - \xi \sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\eta}{dt}\sin\varphi - \eta\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

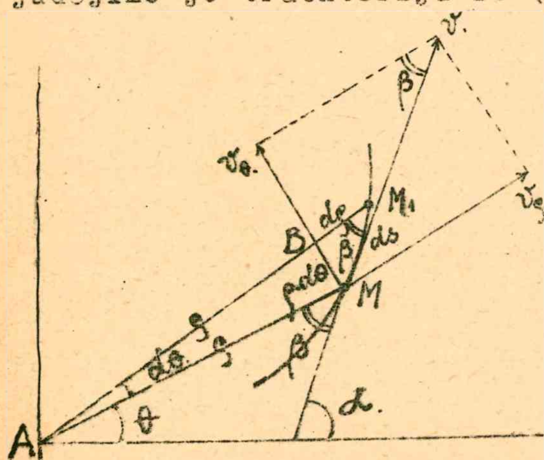
$$\frac{dy}{dt} = v_y = \frac{dy_\Omega}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\sin\varphi + \xi\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\cos\varphi - \eta\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}.$$

Čia $\frac{dx_\Omega}{dt} = u_{ox}$ ir $\frac{dy_\Omega}{dt} = u_{oy}$ yra judamosios sistēmos taško O greitumo u_o projekcijos į X ir Y, $\frac{d\xi}{dt}$ ir $\frac{d\eta}{dt}$ – taško M judējimo traektorija BC reliatyvaus greitumo w projekcijos į Ξ ir H, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ – sistēmos OΞH sukimosi kampinis greitumas duotame momente, todel šiek tiek perstatę narius, pastarasias lygtis galime parašyti šiaip:

$$v_x = [u_{ox} - \xi\omega.\sin\varphi - \eta\omega\cos\varphi] + (w_\xi\cos\varphi - w_\eta\sin\varphi)$$

$$v_y = [u_{oy} + \xi\omega.\cos\varphi - \eta\omega\sin\varphi] + (w_\xi\sin\varphi + w_\eta\cos\varphi)$$

Reiškiniai apskrituose skliausteliuose yra taško judējimo jo traektorija BC (brēž. 30) reliatyvaus greitumo w projekcijos į ašis AX ir AY, reiškiniai gi kvadratiniuose skliausteliuose yra tojo judamos traektorijos BC taško absoliutinio greitumo projekcijos į AX ir AY, kuriame randasi duotame momente judan-



brēž. 30

tis taškas M.

Tikrai, traektorijos BC taškas M, esantis nuo judamosios koordinatų sistēmos pradžios O nuotolyje ρ, turi sudetinį judējimą, susidedantį iš žengimo, vienodo su taško O, ir sukimosi kampiniu greitumu $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ apie šitą centrą; pirmojo judējimo greitumas geometriniai lygus u_0, antrojo gi greitumas lygus $\omega\rho$ ir nukreiptas statmenai ρ, kampo φ didējimo pusēn; išskaide šitą pastarąjį greitumą kryptimis ξ ir η, rasim jo sudedamuosius: $-\eta\omega$ - išilgai ξ ir $+\xi\omega$ - išilgai H, o šitų sudedamųjų projekcijos į ašis AX ir AY duos mums reiškinius, stovinčius kvadratiniuose skliausteliuose. Reiškia kvadratiniuose skliausteliuose tikrai randasi tojo traektorijos BC taško absoliutinio žengimo greitumo u projekcijos į AX ir AY, su kuriuo duotame momente sutampa judantis traektorija taškas M.

Dvejos pastarosios lygtys išreiškia sekančią geometrinę lygybę

$$\bar{v} = \bar{u}_M + \bar{w}$$

Iš čia seka greitumų sudēties teorema:

Jeigu taškas M juda traektorija BC, kuri turi kokį nors savąjį judējimą, tai taško M absoliutinis greitumas v yra jo reliatyvaus judējimo traektorija BC greitumo w ir traektorijos BC tojo taško absoliutinio greitumo u_M, kuriame randasi duotame momente judantis taškas, geometrinē suma.

Reiškinys del taško sudētinio judējimo greitējimo bendrame traektorijos kokio nors transliacijos judējimo atsitikime yra kiek painesnis ir bus išvestas toliau.

a

GREITUMO PROJEKCIJOMS REIŠKINIAI POLIARINĖSE KOORDINATOSE.

Tegu taško M padėtis plokšmėje apibrėžiama poliarinėmis koordinatomis (brėž. 29): radiusu vektoriu AM = ρ ir kampu MAX = θ, sudaromu pastarojo su kai kuria pastovia kryptimi AX. Tada taško M judėjimas plokšmėje bus apibrėžtas, jeigu bus duotos kiekvienam momentui jo koordinatos ρ ir θ, vadinasi, jeigu bus žinomos funkcijos: $\rho = f_1(t)$, $\theta = f_2(t)$.

Tegu kai kuriam laiko momentui t taško padėtis plokšmėje yra M, o sekančiam momentui t+dt – M_1, apibrėžiama koordinatų $\rho+d\rho$ ir $\theta+d\theta$. Atidėję radiuse vektoryje AM_1 ilgumą AB = AM = ρ, matome, kad $BM_1 = d\rho$, o trikampis MBM_1 limite virsta stačiuoju. Bet $BM = \rho d\theta$, $MM_1 = ds$, reiškia,

$$ds^2 = d\rho^2+\rho^2 d\theta^2, \text{ arba } ds = +\sqrt{d\rho^2+\rho^2 d\theta^2}.$$

Dalydami šitas lygtis iš dt, gauname:

$$\frac{ds}{dt} = v = +\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

Pastebėję, kad kelio elemento ds projekcija į radiuso vektorio ρ kryptį yra $d\rho$, o į kryptį jam statmeną – $\rho d\theta$, gausime greitumo v projekcijas į šitas kryptis: projekcija v į kryptį ρ yra:

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}$$

projekcija v į kryptį statmeną ρ yra:

a

$$v_\theta = \rho \frac{d\theta}{dt}$$

Paskutinę kryptį galima pavadinti kryptimi θ, nes kampas θ auga šita kryptimi. Kaip matome, abi tos projekcijos viena kitai statmenos. Greitumo v kryptis apibrėžiama kampu α su OX, būtent:

$$tg\alpha = tg(\theta+\beta) = \frac{tg\theta + tg\beta}{1 - tg\theta . tg\beta}$$

Bet: $$tg\beta = \frac{v_\theta}{v_\rho} = \rho \frac{d\theta}{dt} : \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{(d\rho/d\theta)}$$

Todel: $$tg\alpha = \frac{tg\theta + \rho/\frac{d\rho}{d\theta}}{1 - tg\theta . \rho/\frac{d\rho}{d\theta}} = \frac{tg\theta(\frac{d\rho}{d\theta}) + \rho}{\frac{d\rho}{d\theta} - tg\theta . \rho}$$

Išvestinė $\frac{d\rho}{d\theta}$ gali būti surasta iš formulų:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{f_1'(t)}{f_2'(t)}; \text{ arba } \frac{d\rho}{d\theta} = F'(\theta),$$

jeigu žinomos traektorijos lygtys:

$$\rho = F(\theta).$$

FIZINIAI MECHANIKOS DĒSNIAI.

Kad išvedus saryšį tarp jēgų ir jų iššaukiamų kūnų judējimų, reikia nustatyti kai kuriuos fizinius mechanikos dēsnius, tyrimais paremtus.

1) Inercijos dēsnis (Galilējus 1638 m., Newton): Kiekvienas kūnas visumet lieka rimties arba tolyginio tiesiaeigio judējimo stovyje, kol kokia nors pašalinē priežastis neprivers jo pakeisti šitą stovį. Priežastys, keičiančios šitą kūnų judējimą inercijos deliai (arba rimties), vadinamos jēgomis. Jēgos yra tai veikimas vienų kūnų į judējimus kitų. Jēgos veikimas pasireiškia tuo, kad ji keičia kūno greitumo didumą arba kryptį. Geometrinis kūno greitumo pakeitimas į sekundą vadinamas greitējimu; todel jēga suteikia taškui arba kūnui greitējimą; be to, pastovi jēga suteikia kūnui ir pastovų greitējimą.

Greitējimo kryptis ir jo ženklas (į vieną arba kitą pusę) sutampa su jēgos kryptimi ir ženklu. Jeigu į vieną ir tą patį materialinį tašką arba mažą kūną įvairiais laikais veikia jēgos P_1, P_2, P_3 ......, tai jų suteikiami taškui greitējimai p_1, p_2, p_3 ...... proporcingi jēgoms: $\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_2}{p_2} = \frac{P_3}{p_3} = \ldots\ldots = const = C$. Bet iš kitos pusēs tyrimai parodo, kad jeigu viena ta pati jēga P veikia į kūnus įvairaus svorio arba masēs, tai jų įgaunami greitējimai tuo didesni, kuo mažesnēs masēs, ir atvirkščiai, vadinasi $P = k.m.p$. Tokiu būdu, pastovus kiekvienam kūnui santykis $\frac{P}{p} = C$ proporcingas šito kūno masei; pasirinkę masēs matavimui tokį vienetą, kad $k = 1$, gauname $\frac{P}{p} = m$, arba

$$P = mp;$$

iš čia seka:

2) Jėgos veikimo dėsnis (Newton 1687): Jėga matuojama kūno masės m ir jėgos jai suteikiamo greitėjimo p sandauga: $P = m.p.$ Kada jėga P, veikdama į liuosą kūną su mase m, suteikia jam greitėjima

$$p = \frac{P}{m},$$ tai ji tuo pačiu nuveikia kūno inercija, lygią m.p ir nukreipta tiesiog priešingai jėgai P; todel inercijos pasipriešinimas gali būti pareikštas šiaip: $I = -m.p.$ Jėga P randasi kiekvienu momentu lygsvaroje su jėga I, taip, jog $P+I = 0$. Kūnų inercijos jėgų esime įsitikinome, pavyzdžiui, kada kokiam nors kūnui suteikiamas staigus judėjimas; jeigu tai daroma su siūlo pagalba, tai pastarasis kūnui staigiai pereinant iš rimties į judėjimą (pastumėjimas, didelis pagreitinimas) trūksta neišlaikęs dviejų jėgų, veikiančiųjų į jį priešingomis kryptimis: stumiančios jėgos P ir kūno inercijos pasipriešinimo I.

3) Svorio jėgos veikimo dėsnis. Svorio jėga, arba žemės traukiamoji jėga suteikia visiems kūnams žemės paviršiuje vienodus greitėjimus $g = 9.806 \frac{metras}{sekunda^2}$ (45°-i platumoje, juros lygmėje). Vidutinis g didumas Europoje = 9.81 m/sek.^{2}. Kūno svoris G (arba jėga, kuria veikia į kūną žemė) lygus todel kūno masei m padaugintai iš žemės traukiamosios greitėjimo g: $G = m.g.$ Jėgos vienetu imama (technikoje) vieno vandens litro svoris prie 4°C, 45° platumoje, kur $g = 9.806$ m/s^2. vadinamas kilogramu. Vieno vandens litro masė lieka visuomet ta pati, bet jo svoris mainosi įvairiose žemės vietose po įtaka išcentrinės jėgos, keičiančios žemės traukiamąja ir greitėjimą g, nors ir silpnai (nuo $g_0 = 9.780$ m/s^2 pusiaujyje (ekvatoriuje) iki $g_{90} = 9.832$ m/s^2 ašigaliuose (po-

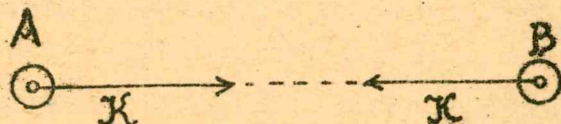
liuose).

Masēs vieneto svorį surasime, priēmę $m = 1$: $Q = 1 \times 9.806 = 9.806$ kgr. Ir tikrai, tokio kūno masē bus

$$m = \frac{Q}{g} = \frac{9.806}{9.806} = 1.$$

Fizikoje masēs vienetu imama nesikeičianti 1 kubinio centimetro vandens prie 4° C masē, vadinamoji gram-masē; greitējimo vienetu $1 \frac{cm}{sek.^2}$, ir jēgos vienetu - dina, tokia jēga, kuri masēs vienetui - gramui suteikia greitējimą, lygų $1 \frac{cm}{sek.^2}$. Kadangi 1 gramas - svoris suteikia 1 gramui - masei greitējimą $g = 9.81$ m/sek.^{2} = 981 cm/sek.^{2}, tai 1 gramas - svoris = 981 dinai, o 1 kgr. = 981000 dinų. Technikai šita, t.v. absoltutinē matų sistēma C. G. S. (centimetras, gramas-masē, sekunda) neparanki deliai dinos mažumo, ir todel, kad technika daugiausia aperuoja su sunkumo jēgomis, reiškiamomis kilogramais, o santykis tarp kilogramo ir dinos, kaip jau mes turējome progos matyti, gana painus.

4) Akcijos lygios reakcijai dēsnis (Newton, 1687) yra tos, kad jeigu kūnas A (brēž. 31) veikia į kitą kūną B su jēga K, pavyzdžiui, traukia jį visuomet į save, tai ir kūnas B veikia į kūną A su ta pačia traukimo jēga K, tik atbulai nukreipta; tos dvi jēgos lygios ir priešingos pakraipos. Šitas dēsnis yra visuotinas, jis vienodas kūnuose, veikiančiuose vienas į kita galinime nuotolyje bei kūnuose ir dalelēse, liečiančiuose vienas kitą.



brēž. 31

TIESIAEIGIS MATERIALINIO TAŠKO JUDĖJIMAS VEIKIANT SVORIO JĖGAI.

Jeigu sunkųjį tašką su mase m paleisti liuosai kristi, nesuteikus jam jokio pradžios greitumo, tai po įtaka savo svorio vertikalės jėgos m.g taškas ims judėti vertikaliai žemyn su nuolatiniu greitėjimu g, vadinasi, tolyginio greitėjimo judėsiu. Išėjus t sekundų nuo puolimo pradžios taško greitumas bus:

$$v = gt;$$

taško nujudėtasai kelias bus:

$$s = \frac{gt^2}{2} = \frac{v^2}{2g}; \quad \text{iš kur}$$

$$v = +\sqrt{2gs}.$$

Čia s vadinama aukštumu, atsakančiu greitumui v, nes krisdamas iš aukštumo s, taškas įgyja greitumą v.

Jeigu taškas, imdamas kristi iš A (brėž. 32) gavo greitumą c žemyn, tai, išėjus t sekundų, jo greitumas bus:

$$v = c+gt;$$

nujudėtasai per t sekundų kelias AB bus

$$s = ct+\frac{gt^2}{2} = \frac{c+v}{2}\,t = \frac{v^2-c^2}{2g}, \quad \text{iš kur}$$

$$2gs = v^2-c^2; \quad v^2 = c^2+2gs, \quad v = +\sqrt{c^2+2gs}$$

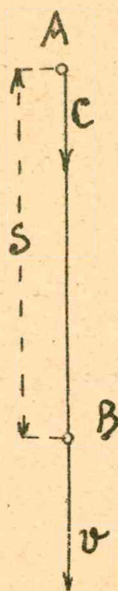
Jeigu kūnas sviestas iš taško A aukštyn (brėž. 33) su greitumu c, tai išėjus t sekundų:

$$v = c - gt,$$

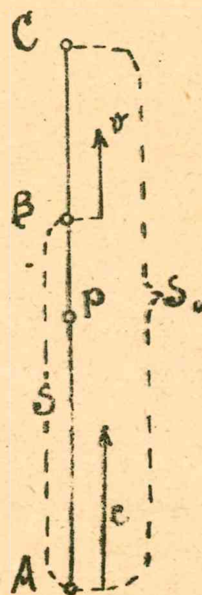
$$AB = s = ct - \frac{gt^2}{2} = \frac{c+v}{2}.t = \frac{c^2-v^2}{2g};$$ iš čia:

$$2gs = c^2-v^2;\ v^2 = c^2-2gs;\ v = \pm\sqrt{c^2-2gs}.$$

Kūnas, sviestas aukštyn, sustoja priėjęs aukščiausiąjį tašką C_1, kada $v = c-gt_0 = 0$, iš kur



brėž. 32



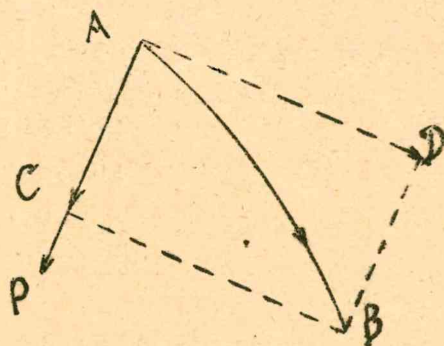
brėž. 33

$t_0 = \frac{c}{g}$; tada $s_0 = \frac{c^2}{2g}$; po to prasideda kūno kritimas žemyn, greitumas kiekviename taške P bus tas pats, kaip ir aukštyn kylant, tik su priešingu ženklu. Tokiu būdu, kildamas kūnas turės taške B greitumą $v = \sqrt{c^2-2gs}$, nukreiptą aukštyn, o krisdamas iš C ir priėjęs B kūnas turės žemyn nukreiptą greitumą $v = \sqrt{2g(s_0-s)}$; bet: $s_0 = \frac{c^2}{2g}$, arba $2gs_0 = c^2$

reiškia $v = \sqrt{c^2-2gs}$, vadinasi, bus lygus greitumui v bekylant tame pačiame taške B. Taip pat kūno pakilimo į aukštumą $s_0 = \frac{c^2}{2g}$ laikas, lygus $t_0 = \frac{c}{g}$, vienodas su jo puolimo laiku iš aukštumo s_0, lygiu $\frac{v}{g}$, kur v - greitumas kelionės pabaigoj, lygus, sulig aukščiau įrodytu, c.

JĖGOS MECHANINIS DARBAS.

Jeigu taškas juda kryptimi veikiančiosios į jį pastoviosios jėgos P, tai jėgos veikimas į taško judėjimą proporcingas jėgai P ir taško išeitajam keliui s, vadinasi, proporcingas sandaugai P.s, vadinamai jėgos P kelyje s mechaniniu darbu T. Jeigu pastovioji jėga P nesutampa savo kryptim su taško keliu kuris, bendrai imant, yra kai kuri kreivoji AB (brėž. 34), tai išsklaide judėjimą AB dviem sudedamaisiais, vienu AC išilgai jėgos P, kitu jai statmenu, rasime, kad jėgos P taško kelyje AB darbo T didumas lygus sandaugai P.AC. Šitame nuotikyje sudedamojo AC kryptis sutampa su jėgos P kryptim; todel jėgos P darbui duodamas pliuso ženklas; jeigu ši sudedamasis AC nukreiptas priešingai jėgai P (brėž. 35), tai jėgos P darbas skaitomas neigiamu:

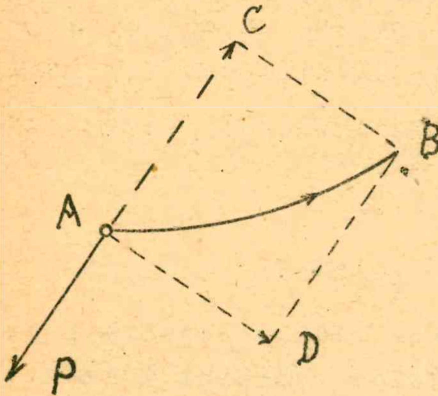


brėž. 34

$$T = -P.AC$$

Jeigu taškas, judėdamas traektorija AB (brėž. 36) įveikiamas kintamosios jėgos P, tai šitos jėgos darbo T suradimui, surasime josios elementarinį

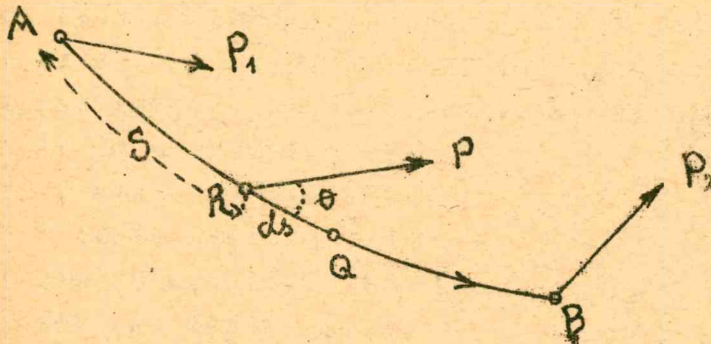
darbą dT taškui išeinant nedidelį kelio elementą RQ = ds, kuriame jėgą P galime skaityti pastovia didumu ir kryptim:



brėž. 35

$$dT = p.ds.\cos\theta$$

jeigu θ yra kampas tarp jėgos P krypties ir elemento ds. Paėmę tokių elementarinių darbų visame kelyje AB sumą, arba integralą iš dT, rasime visą jėgos P darbą kelyje AB: $T = \int P.ds.\cos\theta$. Kad šitą reiškinį integruoti, reikia, kad P ir cosθ būtų išreikšti kelio ilgumo (S = AR) funkcijomis. Jeigu jėga P visumet statmena taško keliui (elementui ds), tai cosθ = o ir T = o, vadinasi, jėga statmena taško keliui, visame šitame kelyje



brėž. 36

nedirba jokio mechaninio darbo.

Tegu taškas išeina kai kurį kreivaeigį kelią AB įveikiamas kelių jėgų P_1, P_2, P_3...P_n, kurių atstojamoji R; be to, visos tos jėgos taškui bekeliaujant iš A į B turi pastovų didumą ir kryptį (jeigu jėgos būtų kintamosios, tai reikėtų paimti labai mažą kelią AB, kuriame jėgos galima skaityti pastoviomis). Sujungę tiesiąja taškus A ir B, mes

matome, kad kokios nors jėgos P_n darbas pasireikš:

$$P_n.AC = P_n.AB.\cos\alpha_n,$$

kur α_n kampas sudaromas jėgos P_n su AB.

Kadangi R yra jėgų $P_1, P_2, P_3...P_n$ atstojamoji, tai projektuodami jėgas $P_1, P_2...P_n$ ir jų suveriančiąją R į AB kryptį, turėsime:

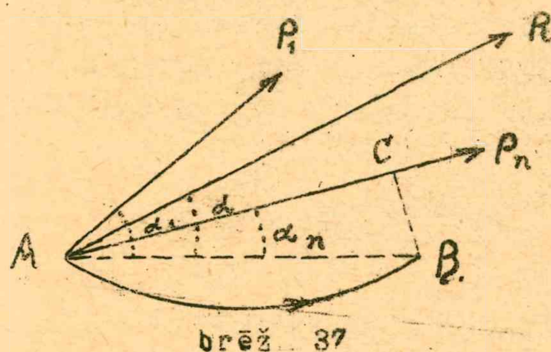
$$R\cos\alpha = P_1\cos\alpha_1+...+P_n\cos\alpha_n.$$

Padauginę abi lygybės pusi iš stygos AB, gauname

$$R.AB.\cos\alpha = P_1.AB.\cos\alpha_1+P_2AB\cos\alpha_2+...+P_nAB\cos\alpha_n$$

Iš čia teorēma: Jeigu taškas jėgų įveikiamas išeina kokį nors kelią, tai atstojamosios darbas lygus algebrainei sudedamųjų jėgų darbų sumai. Darbas, kuris yra sandauga jėgos ir kelio, matuojamas darbo vienetais: kilogramometrais, svarapėdomis ir t.t., reiškiančiais sandaugas kilogramo ir metro, svaro ir pėdos ir t.t.

Materialinio taško kinētinē energija arba gyvoji jēga arba jo sugebējimas atlikti darbą. Jeigu į materialinį tašką su mase m (brėž. 38), kuris randasi ramybės stovyje, paveikė kai kurį laiką pastovi jėga P, suteikusi jam greitėjimą $p = \frac{P}{m}$ ir taškas nuėjo jėgos P kryptim kelią s įgydamas jo gale greitumą v, tai,



brēž. 37

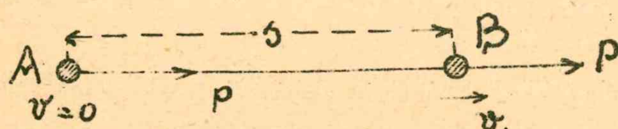
kaip mes aukščiau matėme.

$$s = \frac{v^2}{2p}.$$

Padauginę abi dalis šito reiškinio iš P, randame.

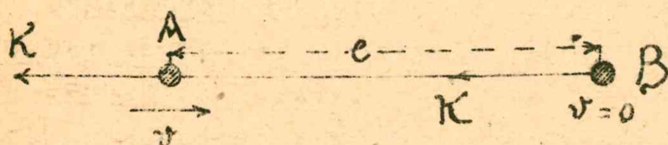
$$P.s = \frac{Pv^2}{2p} = \frac{mv^2}{2}.$$

P.s yra tai jėgos P darbas kelyje s; $\frac{mv^2}{2}$ vadinama gyvaja jėga (Leibnitz), arba kinetine energija arba jo sugebėjimu atlikti darbą (Grashof).



brėž. 38

Taško kinetinė energija gali vėl atlikti bet kurį lygų jai mechaninį darbą K.l, taško greitumui v virstant nuliu. Ir tikrai, paveiksime į kūną su mase m (brėž. 39) judantį greitumu v ir turintį kinetinę energiją $\frac{mv^2}{2}$, pastovia jėga K prie-



brėž. 39

šingoje greitumui v pakraipoje; taškas ims judėti tolyginio mažėjimo judėjimu su lėtėjimu $p_1 = \frac{K}{m}$; greitumas v virs nuliu po $t = \frac{v}{p_1}$ sek., o taško nujudėtasai kelias bus

$$l = \frac{p_1 t^2}{2} = \frac{v^2}{2p};$$

padauginę šitas lygtis iš K, turėsime

$$K.l = \frac{Kv^2}{2p} = \frac{mv^2}{2}.$$

tokiu būdu gyvoji jēga $\frac{mv^2}{2}$ gali benykdama nugalēti pasipriešinimą K kelyje l, vadinasi atlikti lygų sau darbą K.l. Todel Grashofas pavadino reiškinį $\frac{mv'^2}{2}$ sugebējimu atlikti darbą (Arbeitsvermögen).

Jeigu į tašką m, judantį greitumu c ir turintį kinetinēs energijos $\frac{mc'^2}{2}$, paveikē jēga P kelyje s šito kelio pakraipa, tai taško kinetinē energija padidēs ant P.s ir jo galutinio greitumo v didumas susisæks iš lygčių:

$$\frac{mc^2}{2} + P.s = \frac{mv'^2}{2},$$

iš kur. $$Ps = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$$

Tuo būdu mes gauname gyvųjų jēgų ir darbų teorēmą: <u>Materialinio taško gyvosios jēgos arba kinetinēs energijos padidējimas kai kuriuo laikotarpiu lygus veikiančiųjų tuo laikotarpiu į tašką jēgų darbui.</u> Jeigu jēgos P darbas bus neigiamas, vadinasi, jēga P veiks priešingai taško judējimo pakraipai, tai mūsų lygtys įgyja sekančio pavidalo:

$$-P.s = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} \quad \text{arba}$$

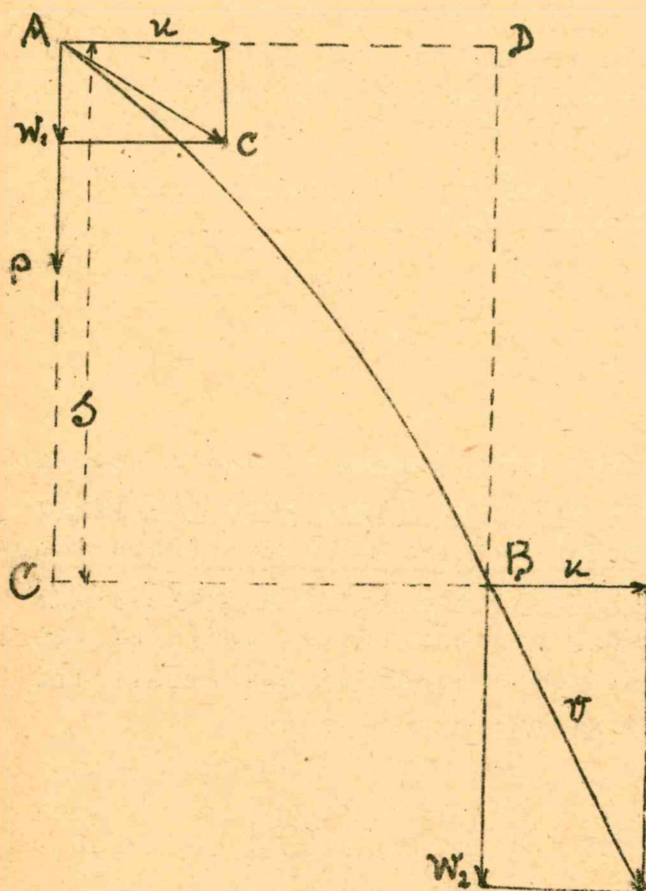
$$P.s = \frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2},$$

reiškia, šiam nuotikiui galinē gyvoji jēga $\frac{mv^2}{2}$ bus mažesne uź pradinę $\frac{mc^2}{2}$ taško padirotoji darbo P.s didumu, nes jēga P yra taško nugalimasai pasipriešinimas Gyvųjų jēgų ir darbų teorēma pritaikoma ir taško kreivaeigiam judējimui

Tegu į materialinį tašką su mase m (brēž.: 40)

turintį vietoje A greitumą c, ēmē veikti pastovi jēga P, nesutampanti su greitumu c, taškas ims krutēti kreivąja traektorija AB jēgos P ir greitumo c plokšmēje.

Kai kuriam laikui praslinkus taškas ateis į padētį B. Išsklaidysime judējimą AB į du: vieną AC pastoviosios jēgos P pakraipa, kitą AD statmenai pirmajam.



brēž. 40

Tom pačiom dviem kryptim išsklaidysim taško pradinį greitumą c vietoje A ir galinį greitumą v vietoje B. Statmenieji jēgai P sudedamieji greitumų c ir v bus vienodi ir lygūs u, nes jų pakraipa neveikia jokia jēga. Greitumams gi w_1 ir w_2 išilgai jēgos P pritaikoma aukščiau įrodytoji teorēma. Jeigu pavadinsime traektorijos AB sudedamąją AC išilgai jēgos P per s, tai turime

$$\frac{mw_2^2}{2} - \frac{mw_1^2}{2} = P.s; \text{ bet}$$

$$v'^2 = w_2'^2 + u'^2 \quad \text{ir} \quad c^2 = w_1'^2 + u'^2,$$

atimdami iš vienos lygybės kitą, gauname:

$$v'^2 - c^2 = w_2'^2 - w_1'^2,$$

tokiu būdu:

$$\frac{mw_2'^2}{2} - \frac{mw_1'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = P.s.$$

P.s yra tai jėgos P darbas taškui išeinant traektoriją AB, todel gyvųjų jėgų ir darbų teorėma praplečiama ir kreivaeigiam taško judėjimui. Jeigu jėga P yra kintamoji, tai reikia paimti taško kelio mažą elementą, kuriame jėgą P galime skaityti pastovia, ir tokiam taško elementariniam paslinkimui gausime: taško gyvosios jėgos elementarinis padidėjimas: $d(\frac{mv^2}{2})$ lygus jėgos P.ds cos α elementariniam darbui. Integruodami šitas lygtis ribose nuo c iki v ir nuo 0 iki s, gauname

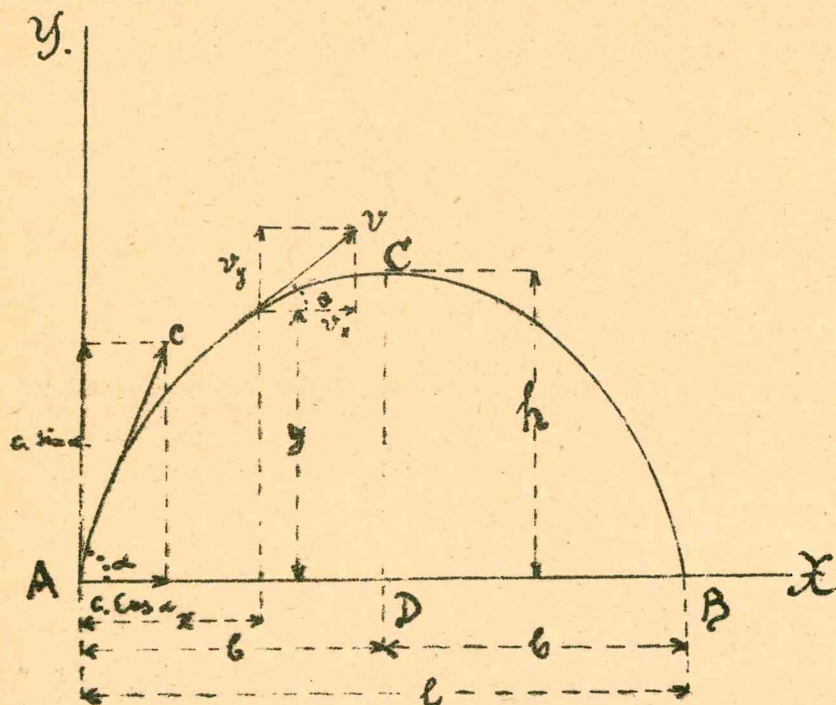
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = \int_0^s P.ds \cos\alpha.$$

Jeigu į tašką veikia jėgų grupė, kurių atstojamoji yra P, tai taško gyvosios jėgos padidėjimas lygus jėgos P darbui, arba algebrainei veikiančių jų į tašką jam išeinant kelią s jėgų darbų sumai.

KŪNO, SVIESTO ĮKIPAI HORIZONTUI, PARABOLINIS JUDĖJIMAS.

Tegu sunkusis kūnas (brėž. 41) sviestas iš taško A greitumu c, sudarančiuoju su horizontu kampą α. Jis judės greitumo c ir vertikalės AY

nustatytoje plokšmėje. Išsklaidome taško judėjimą į du sudedamuosius, horizontalinį su pradžios greitumu c.cosα ir vertikalinį su pradžios greitu-



brėž. 41

mu c.sinα. Horizontalinis judėjimas bus tolyginis, taško koordinata x išreiškiama. $x = c.\cos\alpha.t$; vertikalinis judėjimas bus tolyginio mažėjimo, koordinata y lygi: $y = c.\sin\alpha.t - \frac{gt^2}{2}$. Išėjus t laikui sudarančių judėjimų greitumai, arba tikrojo taško judėjimo greitumo v sudedamieji bus:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = c.\cos\alpha; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = c.\sin\alpha - gt;$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v_y}{v_x} = \mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gt}{c.\cos\alpha}.$$

Taško traektorijos lygtis mes gausime, jeigu iš

lygčių $x = c.\cos\alpha.t$ surasime $t = \frac{x}{c.\cos\alpha}$ ir pastatysime į reiškinį y-kui; gausime:

$$y = tg\alpha.x - \frac{gx^2}{2c^2.\cos^2\alpha},$$

tai yra parabola su vertikaline ašimi. Aukščiausias taškas C pasiekiamas t_1 momentu, kada $v_y = 0$, arba $c.\sin\alpha - gt_1 = 0$, iš čia $t_1 = \frac{c.\sin\alpha}{g}$; šitam taškui mes turime:

$$x = b = \frac{c^2\sin\alpha.\cos\alpha}{g}; \quad y = h = \frac{c^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g} =$$

$$= \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g},$$

vadinasi, h yra aukštumas, atatinkąs pradžios vertikaliam greitumui $c.\sin\alpha$

Kadangi sunkaus taško judėjimas vertikale aukštyn ir žemyn vyksta tuo pačiu dėsniu, tik su priešinga greitumų pakraipa, o horizontalinis judėjimas - tolyginis, tai taško judėjimo traektorija turi simetrijos ašį vertikalę CD. Bendrasis skridimo nuotolis

$$l = 2b = \frac{c^2.2\sin\alpha.\cos\alpha}{g} = \frac{c^2.\sin2\alpha}{g}.$$

Viso skridimo l laikas bus:

$$t_2 = 2t_1 = \frac{2c.\sin\alpha}{g}.$$

Taško greitumas v padėtyje, nužymėtoje koordinatomis x ir y, patogiausiai randamas iš gyvųjų jėgų ir darbų lygčių:

$$\frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mg.y, \quad \text{iš kur:} \quad v^2 = c^2 - 2gy \quad \text{arba}$$

$$v = \sqrt{c^2 \cdot 2gh}$$

Mažiausias greitumas v bus parabolės viršūnėje c, kur jis lygus horizontaliniam sudedamajam c.cosα. Greitumas taške B yra lygus savo didumu greitumui c pradžios taške A. Jeigu puolimas tęsiasi už taško B apačion, tai taško greitumas einant formula

$$v^2 = c^2 - 2gy$$

vis didės, nes y darosi neigiamu. Duotajam greitumui c bendrasis skridimo nuotolis pareina nuo palinkimo kampo α, būtent:

$$l = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Didžiausią reikšmę įgauna l, kada sin2α = 1, vadinasi, 2α = 90°, arba α = 45°; tada $l = \frac{c^2}{g}$. Kadangi

$$\sin(90^\circ + \varphi) = \sin(90^\circ - \varphi),$$

tai skridimo nuotoliui l gaunamas tas pats didumas, kada 2α = 90°+φ arba $\alpha = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$, ir kada $\alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$. Du šuviai, iššauti 45°-β ir 45°+β kampais su horizontu, pataikys į tą patį tašką vienoje horizontalėje su armota, (tiesioginis ir

apriestinis šaudymas).

Didžiausias sviesto kūno pasiekiamas aukštumas

$$h = \frac{c^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

bus tada, jeigu $\alpha = 90^\circ$, vadinasi $h_{max} = \frac{c^2}{2g}$; šitas aukštumas, kaip mes matome, yra dukart mažesnis už kūno skridimo didžiausį tolumą $l = \frac{c^2}{g}$ prie $\alpha = 45^\circ$; šiuo atvėju

$$h = \frac{c^2 \sin^2 45^\circ}{2g} = \frac{c^2}{4g}.$$

KREIVAEIGIS TAŠKO JUDĖJIMAS.

Tangencialinis ir normalinis taško greitėjimai. Jeigu taškas su mase m juda veikiant jėgai P, sudarančiai kampą φ su taško greitumu v (jėga P ir kampas φ gali būti kintamais) ir jėga P lieka visą laiką vienoje plokšmėje su taško pradžios greitumu v, tai jis aprašo kreivąją traektoriją toje pat plokšmėje.

Tegu laiko momentui t, kada taškas randasi padėtyje A (brėž. 42) jėga P sudaro su taško greitumu v kai kurį kampą φ; išskaidę jėgą P dviem komponentėmis - vieną $P_t = P\cos\varphi$ kryptimi v arba traektorijos liečiamąja ir kita $P_n = P\sin\varphi$ - tos traektorijos normalės AO kryptimi, pastebėsime, kad jėga P_t didina greitumą v, o jėga P_n keičia jo kryptį, kitaip sakant, iškreipia taško traektoriją.

Paėmę taško padėtį B momentu t+dt pastatę tam momentui taško greitumą v+dv = BE ir išvedę per B

liniją BC = ir || v, o taipogi pastate suveriančiąją CE = $d\sigma = p.dt$, kur $p = \frac{P}{m}$ yra taško greitėjimas momentu t, projektuojame atkarpą $p.dt =$ CE į dvi kryptis: lygiagrete ir statmena greitumui v.

brėž. 42

Gauname atkarpas CD = $p_t dt$ ir DE = $p_n dt$, kur p_t ir p_n yra greitėjimo p projekcijos į traektorijos liečiamąją ir statmenį. Greitėjimai p, p_t ir p_n yra lygiagretūs atatinkamoms atkarpoms pdt, $p_t dt$ ir $p_n dt$ bei jėgoms P, P_t ir P_n ir surišti su pastarosiomis sąlygomis:

$$p = \frac{P}{m}, \quad p_t = \frac{P_t}{m}; \quad p_n = \frac{P_n}{m}.$$

Greitėjimai p_t ir p_n, be to, dar gali būti išreikšti kaipo taško greitumo v ir jo traektorijos kreivumo spindulio ρ funkcijos. Jeigu lankas AB, taško išeitas laiko elementu dt, yra ds = vdt, tai

du taško traektorijai statmenys AO ir BO susikirs traektorijos kreivumo centrē O, sudarydami tarpusavio kampą $d\alpha = \frac{ds}{\rho}$, kur ρ = AO = BO yra traektorijos kreivumo spindulys. Tą patį kampą $d\alpha$ sudaro tarpusavio greitumai v ir $\bar{v}$+dv.

Todel iš trikampio BCE turēsime:

$$CD = p_t dt = (v+dv)\cos d\alpha - v = (v+dv)1 - v = dv$$

(nes $\cos d\alpha$ skiriasi nuo vieneto begaline mažybe antrojo laipsnio). Iš čia surasime tangencialinį greitējimą:

$$p_t = \frac{dv}{dt}.$$

Toliau.

$$DE = p_n dt = (v+dv)\sin d\alpha = (v+dv)d\alpha = v.d\alpha = \frac{v.ds}{\rho}$$

(begaline mažybe antrojo laipsnio $dv.d\alpha$ atmetame); įstatome $d\alpha = \frac{ds}{\rho}$, turime: $p_n dt = v\frac{ds}{\rho}$, iš kur gausime: normalinis greitējimas

$$p_n = \frac{v}{\rho}.\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Panašiu būdu randame:

$$p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{P_t}{m} = \frac{P\cos\varphi}{m}; \quad p_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{P_n}{m} = \frac{P\sin\varphi}{m}.$$

Pirmosios lygtys duoda galimybēs surasti tangencialinį greitējimą p_t, arba greitumo padidējimą į se-

kundą, antrosios traektorijos kreivumo spindulį $\rho = \frac{mv^2}{P\sin\varphi}$. Jeigu jėga P = const. ir visą judėjimo laiką lieka statmena traektorijai, tai $\varphi = 90^o$, $\sin\varphi = 1$; $\cos\varphi = 0$; $p_t = \frac{dv}{dt} = 0$, v = const.; $\rho = \frac{mv^2}{P}$ = const.; tokiu būdu šiame nuotikyje taškas tolyginiai juda apskritimu. Normalinis greitėjimas $p_n = \frac{v^2}{\rho}$, nukreiptas, kaip ir jėga P_n į traektorijos kreivumo centrą, vadinasi įcentriniu greitėjimu.

Bendrosios taško judėjimo lygtys, kaip mes matėme, bus:

$$\overline{P} = \overline{m.p.}$$

Kreivaeigiam judėjimui jos gali būti pakeistos dviem sekančiomis:

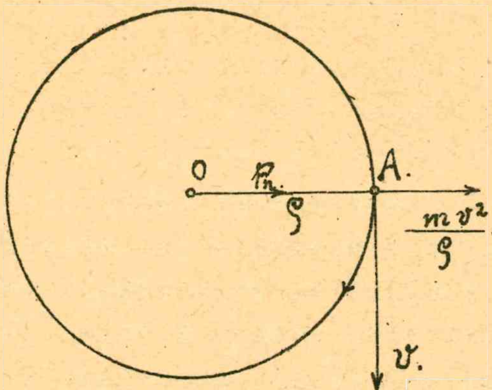
$$P_t = m.\frac{dv}{dt} \quad \text{ir} \quad P_n = \frac{mv^2}{\rho} \quad \text{arba}$$

$$P_t - m.\frac{dv}{dt} = 0 \text{ ir } P_n - \frac{mv^2}{\rho} = 0;$$

Reiškinys: $-m.\frac{dv}{dt}$ arba $-mp_t$, reiškia taško inercijos tangencialinė jėgą; reiškinys $-m\frac{v^2}{\rho}$ arba $-mp_n$ yra normalinė arba iščentrinė inercijos jėga; todel galima pasakyti, kad taško kreivaeigiam judėjimui tangencialinė stumiančioji jėga P_t yra atsveriama inercijos tangencialinės jėgos $-m\frac{dv}{dt}$, o įcentrinė jėga P_n - inercijos iščentrinės jėgos $-\frac{mv^2}{\rho}$.

Tokiu būdu, sunkiame kūne A (brėž. 43), kuris ant siūlo AO sukasi apie nejudantį tašką O, randasi lygsvaroje dvi jėgos, nukreiptos į priešingas puses, būtent: siūlo OA, įtvirtinto taške O įtempimas P_n ir besisukančio kūno A iščentrinė inerci-

jos jēga $\frac{mv^2}{\rho}$. Todel veikiantis į tašką O siūlo įtempimas $P_n = \frac{mv^2}{\rho}$ gali būti surastas, jeigu žinomi didumai m, v, ir ρ.



brēž. 43

pavyzdis. Mēnulis sukasi apie žeme maždaug tolyginiai apskritimu, kurio spindulys lygus 60 žemēs spindulių; jo judējimo greitumas $v = 1020 \frac{metrų}{sekunda}$. Žemēs vidutinis radiusas lygus 6370 klm. arba 6370000 metrų. Todel mēnulio judējimo apie žeme greitējimas bus:

$$P_n = \frac{(1020)^2}{60 \cdot 6370000} = 0{,}0027 \frac{mtr.}{sek.^2}.$$

Kadangi v = const., tai $p_t = \frac{dv}{dt} = 0$, o todel $p_n = p$ = pilnajam mēnulio greitējimui, kuris, reiškia, taipogi nukreiptas į žemēs centrą. Vadinasi, jēga, verčiančioji mēnulį suktis apie žeme, pareina iš pastarosios. Bet rastasis mēnulio greitējimo didumas $0{,}0027 \frac{m}{sek.^2}$ 3600 arba 60^2 kartų mažesnis už žemēs greitējimą $g = 9{,}81$ m/sek.^{2} žemēs paviršiuje, vadinasi vieno radiuso nuo žemēs centro nuotolyje. Šitas dalykas pirmasai davē Newton'ui galimybēs spresti, kad traukos jēga (proporcingoji jos suteikiamiems greitējimams) veikia atvirkščiai proporcingai nuotolių kvadratams.

ne n[illegible]

SUVARŽYTASAI, ARBA VERČIAMASIS MATERIALINIO TAŠKO JUDĒJIMAS.

Liuosojo materialinio taško judējimas nustatomas lygčių:

$$P = m.p$$

Jeigu gi taškas nevisai laisvas, pavyzdžiui, jis verčiamas judēti kokiu nors paviršiu, kliudančiu jam judēti taip, kaip jis judētų po veikiančiosios jēgos P įtekme, tai paviršius sudaro į tašką tam tikrą veikimą, vadinamą paviršiaus reakcija; į šitą veikimą galima žiūrēti, kaipo į tam tikrą jēgą, pridētąją į tašką drauge su išorine jēga P ir verčiančią tašką judēti tam tikru būdu duotajame paviršiuje. Tyrimai rodo, kad jeigu paviršius visai lygus, tai jisai duoda judančiajam juo taškui tikrai normaline reakciją, vadinasi, statmeną paviršiui jo lietimosi su tašku vietoje. Visai lygių kūnų prigimtyje nēra, bet juo dailesni besiliečiantieji kūnai, tuo šita taisyklē artimesnē tikrenybei.

Skaitysime paviršiaus reakciją normaline ir pavadinsime ją N.

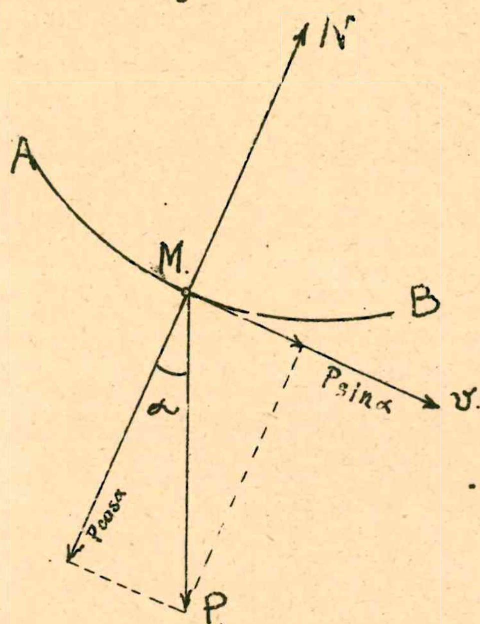
Taško judējimas yra dar labiau suvaržytas, jeigu jis verčiamas judēti kokia nors linija, pavyzdžiui, išilgai plono, slidaus vamzdelio, arba slysti viela, einančia per patį tašką.

Šituo atvēju lygiosios linijos reakcija N į judantį ja tašką bus statmena linijai, kitais žodžiais, guli plokšmēje, statmenoje linijai ir einančioje per vietą, kurioje randasi taškas

Paviršiaus arba linijos reakcija N įgauna tokio didumo ir pakraipos, kad drauge su išorinėmis jėgomis privertus tašką judėti duotuoju paviršiu arba linija.

Todel jėgos N didumas yra reliatyvus ir pareina nuo paviršiaus, arba linijos pobūdžio, kuriąja slenka taškas, nuo jo masės ir greitumo, o taipogi išorinių jėgų, veikiančiųjų į tašką.

Tegu materialinis taškas M (brėž. 44) juda plokščiąja kreivąja AB ir duotame momente turi greitumą v, be to dar, į tašką veikia jėga P, gulinti plokšmėje AMB ir sudaranti su išorine normale kreivajai AB kampą α. Daleiskime, kad kreivosios AB normalinė reakcija N nukreipta kreivosios vidujine normale ir raskime jos didumą; jeigu ji gausis neiguama, tai bus ženklas, kad jėga N nukreipta išorine normale.



brėž. 44

Projektuodami jėgas P ir N į liečiamąją kreivajai AMB taške M ir į vidujine normale ir prilygindami šitas projekcijas taško masei, padaugintai iš atatinkamų taško greitėjimo projekcijų į tas pačias kryptis gausime:

$$P\sin\alpha = m\frac{dv}{dt}; \quad N - P\cos\alpha = \frac{mv^2}{\rho}.$$

Iš pirmųjų lygčių rasime taško tangencialinį greitėjimą

$$p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{P\sin\alpha}{m},$$

o iš antrųjų - traektorijos AB reakciją

$$N = P\cos\alpha + \frac{mv^2}{\rho}.$$

Jeigu jēga P būtų nukreipta kreivosios vidun ir sudarytų su vidujine normale kampą α, tai turētumēm:

$$N + P\cos\alpha = \frac{mv^2}{\rho}, \text{ iš kur}$$

$$N = \frac{mv^2}{\rho} - P\cos\alpha.$$

Šitame atsitikime, jeigu komponentē $P\cos\alpha$ pati viena galētų iššaukti taško įcentrinį greitējimą $p_n = \frac{v^2}{\rho}$, vadinasi, jeigu $P\cos\alpha = \frac{mv^2}{\rho}$, tai $N = 0$, iš kur seka, kad šiuo atvēju taškas judēs savo traektorija be jokios josios reakcijos, arba kitais žodžiais, vamzdelis arba viela taško judējimo atlikimui bus nereikalingi.

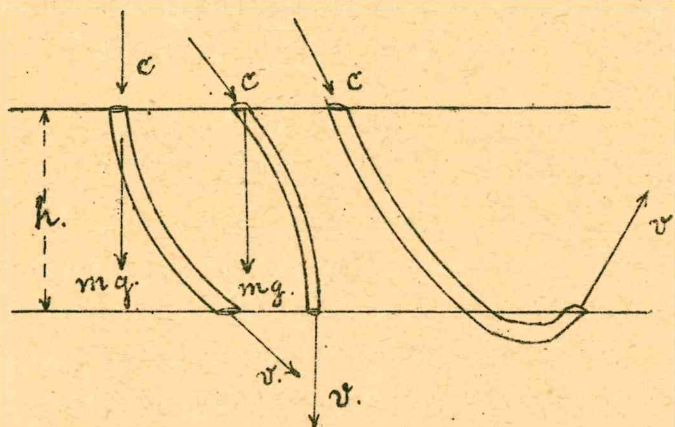
Taškų suvaržytųjų judējimų tyrinējimams patogu esti taikinti gyvųjų jēgų ir darbų teorema, nes jēgos N darbas, kaipo visumet statmenos keliui, visumet bus lygus nuliui. Todeliai, jeigu taškas juda paviršiumi arba linija po įtēkme vien tik svorio jēgos, tai taško kinetinēs energijos padidējimas $\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$ lygus jo svorio darbui $m.g.h$, kur h yra taško nusileidimo aukštumas, nepaisant šito judējimo traektorijos (brēž. 45); galinis greitumas v gaunamas iš lygčių (jeigu c yra pradžios

greitumas):

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{mc'^2}{2} + mgh \quad \text{arba} \quad v'^2 = c^2+2gh.$$

TAŠKO TOLYGINIS JUDĖJIMAS HORIZONTALINIU APSKRITIMU.

Tegu taškas M su mase m turi judėti horizontaliniu apskritimu su spinduliu r (brėž. 46) įveikiamas vien tik svorio jėgos mg ir turėdamas pradžios greitumą v liečiamą šitam apskritimui; judėjimas bus tolyginis, nes svoris nedirba jokio darbo.



brėž. 45

Tolyginis judėjimas apskritimu yra iššaukiamas įcentrinės jėgos $MP = \frac{mv'^2}{r}$, nukreiptas į apskritimo centrą. Todel apskritimo normalinė reakcija N bus tokia, kad drauge su svorio jėga mg duotų atstojamąją $MP = \frac{mv'^2}{r}$. Iš tos sąlygos gauname:

$$tg\alpha = \frac{MP}{MQ} = \frac{mv'^2}{r}:mg = \frac{v'^2}{gr},$$

kame α yra reakcijos N palinkimo kampas į vertikale.

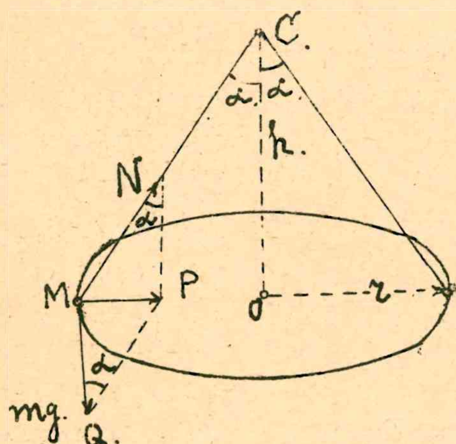
$$N = QP = \frac{MQ}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Jėga N susikerta su vertikale OC pastoviame taške

C_1 esančiame nuotolyje CO = h nuo apskritimo centro; be to, $\frac{r}{h} = \operatorname{tg}\alpha$ arba

$$h = \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{gr^2}{v'^2} = \text{const}.$$

Todel jėga N galima įkūnyti kaipo netįstančio siūlo MC pasipriešinimą vienu galu įtvirtinto pastoviame taške C, o kitame gale M turinčio tašką m. Šito siūlo ilgumas būtų



brėž. 46

$$MC = \frac{h}{\cos\alpha} = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

Kada yra duota r ir h, greitumas v, kurį privalo turėti prikabintas prie siūlo taškas m, kad judėti apskritimu, randamas iš sąlygų:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v'^2}{gr} = \frac{r}{h}, \text{ iš kur } v'^2 = \frac{gr^2}{h}, \text{ arba } v = r\sqrt{\frac{g}{h}} =$$

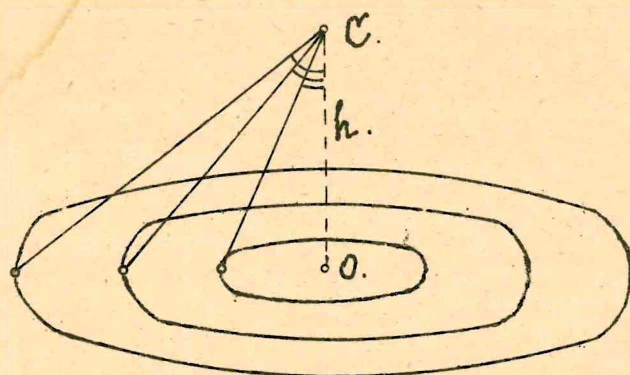
$$= r\sqrt{\frac{g\operatorname{tg}\alpha}{r}} = \sqrt{gr\operatorname{tg}\alpha}.$$

Taškui judant apskritimu, siūlas aprašo kūgio paviršių, todel toks prietaisas vadinamas kūgine švytuokle. Kūginės švytuoklės pilno apsisukimo apskritimu spindulio r laikas T randamas iš lygčių:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Tokiu būdu T nepareina nuo apskritimo spindulio, o tik nuo taško C aukštumo h virš svyravimo plokš-

mēs. Todel keletas įvairių ilgumų kūginių švytuoklių (brėž. 47) turinčių tą patį aukštumą h ir



brėž. 47

įvairius r ir kampo α didumus, darys pilną apsisukimą tuo pačiu laiku $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, jeigu kiekvienos švytuoklės sunkioji masė m gaus atatinkantį pradžios greitumą v, lygų: $v = r\sqrt{\frac{g}{h}}$; be to, kadangi ir apskritimo ilgumas $2\pi R$ ir judėjimo greitumas $v = r\sqrt{\frac{h}{g}}$ yra proporcingi apskritimo spinduliui r, tai dalmuo nuo dalymo $2\pi R$ iš v, arba apsisukimo laikas T, lieka pastovus.

Pavyzdžiui, jeigu h = 1m ir r = 1m. tai

$$T = 2.3,14\sqrt{\frac{1}{9.81}} = 2,01 \text{ sek.}$$

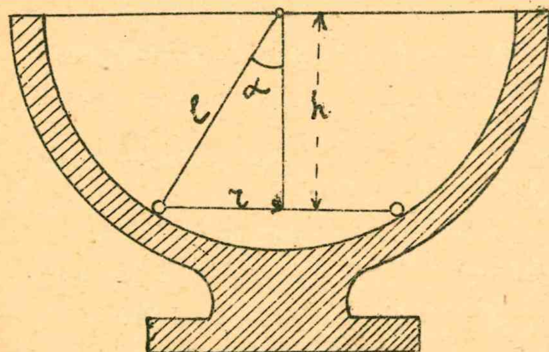
Judējimo apskritimu greitumas

$$v = 1\sqrt{\frac{9.81}{1}} = 3,13 \ \frac{\text{metras}}{\text{sekunda}}.$$

Sudarymui reikalingosios reakcijos N galima vietoje siūlo pasipriešinimo paimti tuščio rutulio paviršiaus pasipriešinimą, kurio viduje juda taškas m. Pavyzdžiui, jeigu mes norime, kad sunkusis rutulēlis riedētų sierinio indo spindulio r (brēž. 48) viduje, tai rutulēliui turi būti suteiktas horizontaline kryptimi pradžios greitumas $v = \sqrt{grtg\alpha}$, kur α randamas iš sąlygos:

$$\sin\alpha = \frac{r}{l}.$$

Be sferinio paviršiaus normalinioji reakcija N gali būti sudaryta ir kūginio paviršiaus, kurio

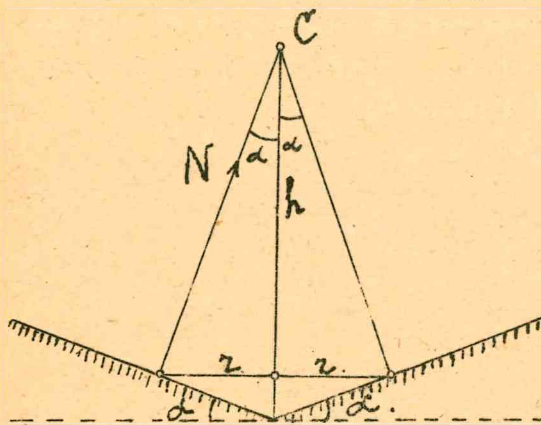


brėž. 48

sudaromoji palinkusi į horizontą kampu α (brėž. 49), kuriam mes turime sąlygą:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{gr};$$

iš čia, kada duoti v ir r didumai, randame kūgio sudaromųjų palinkimą į horizontą tgα. Tokį atsitikimą turime geležkelio pasisukimo vietoje (ant kreivųjų), kur išorinis bėgis statomas aukščiau vidujinio (brėž. 50), taip, kad bėgių paviršius sudaro kūgio paviršių

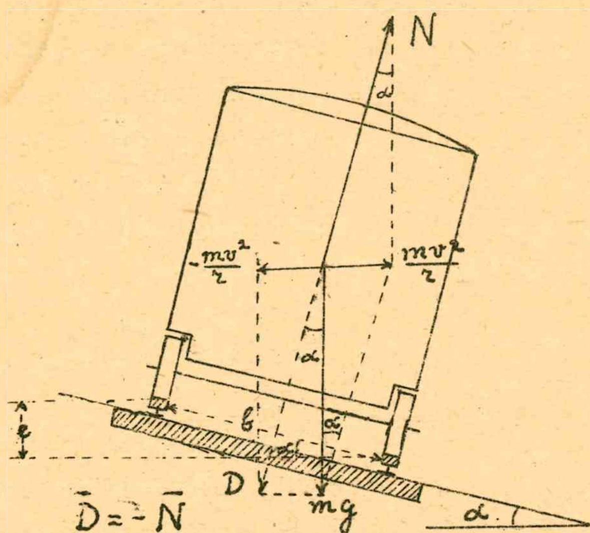


brėž. 49

ir jeigu skersinį kelio palinkimą tgα paimti lygų $\frac{v^2}{gr}$, kur v - traukinio greitumas, o r - kreivosios spindulys, tai kelio reakcija N bus statmena bėgių paviršiui, o tuo pačiu ir ratų spaudimas į kelią bus statmenas pastarajam, vadinasi, ratų rebordai neturės kenksmingo šoninio spaudimo į kelią.

Išorinio bėgio pakilimas e rasis iš sekančios

formulos, kurioje b yra nuotolis tarp bēgių:



brēž. 50

$$e = b.\sin\alpha,$$

arba, kadangi α labai mažas,

$$e = b.\mathrm{tg}\alpha = \frac{bv^2}{gr}.$$

Pavyzdžiui, jeigu b = 1,5m, v = 20 mtr/sek, r = 600 m., tai

$$e = 1,5\frac{20^2}{9,81 \times 600} = 0,102 \text{ mtr.}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{(20)^2}{9,81 \times 600} = 0,068 = \sin\alpha;$$

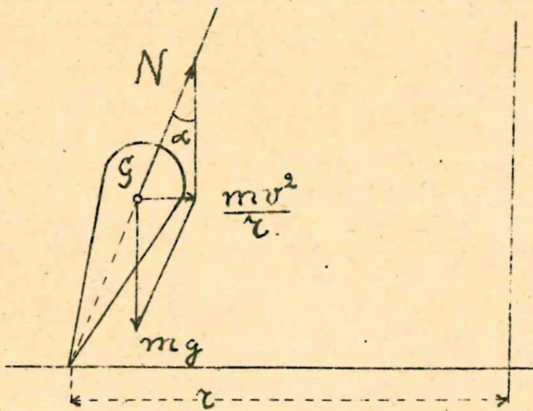
$$\alpha = 3^{\circ}54'.$$

Arklys, bēgdamas cirko ratu, arba dviratis, aprašąs apskritimą spindulio r su greitumu v (brēž. 51) priima pašlijusią padētį, sudarančią su vertikale tokį kampą α, kad

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v^2}{gr};$$

tada žemēs reakcija N sutaps su centraline arklio arba dviratininko kūno plokšme, vadinasi, eis per arklio ar dviratininko svorio centrą G, į kurį veikia svoris mg ir turi būti pridēta įcentrinē jų atstojamoji jēga $\frac{mv^2}{r}$. Čia pravertu pastebēti, kad

jeigu jēgos mg ir N duoda atstojamąją įcentrinę jēga $\frac{mv^2}{r}$, tai jos yra atsveriamos priešingosios pakreipos išcentrinēs inercijos jēgos - $\frac{mv^2}{r}$, sudarydamos su jąja uždarytąjį jēgų trikampį:

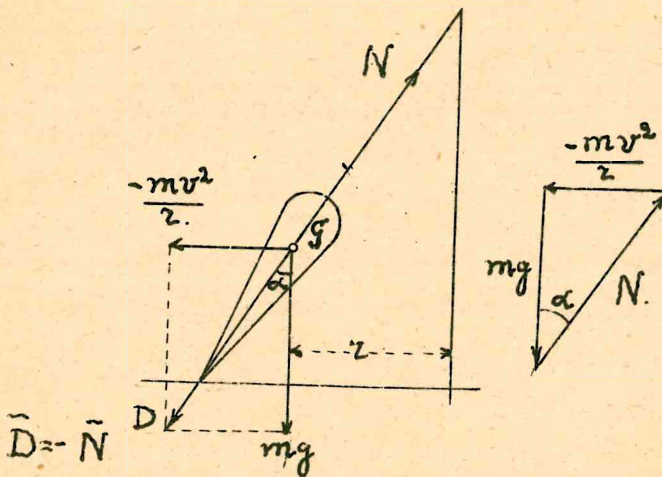


brēž. 51

$$mg + N - \frac{mv^2}{r} = 0$$

(brēž. 52).

Tokiu būdu taško kreivaeigio judējimo užduotis suvedama į statinēs jēgų pusiausvyros uždavinį, jeigu prie veikiančiųjų į kūną išorinių jēgų pridēti fiktivinę judančiojo kūno inercijos jēgą.

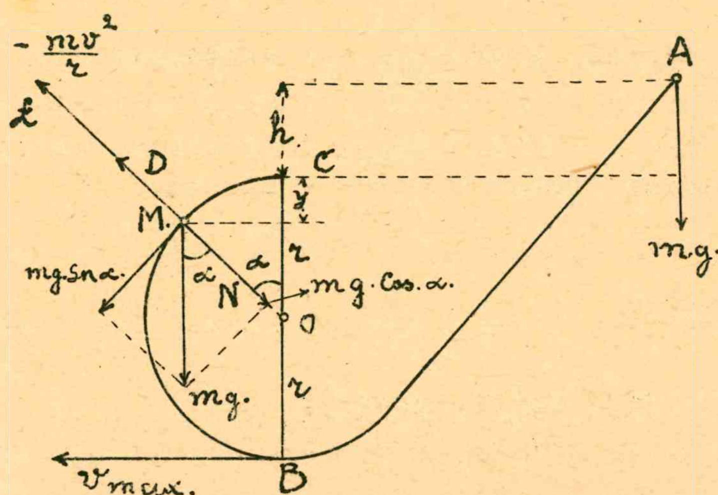


brēž. 52

Toliau bus parodyta, kad šitoji taisyklē sudaro pamatinį dinamikos principą (D'Alembero pradas).

TAŠKO JUDĖJIMAS STAČIUOJU RATU.

Tegu ABMC (brėž. 58) yra kreivoji, gulinti vertikalinėje plokšmėje: ja ja turi judėti sunkusis taškas M, pavyzdžiui, išlenkta geležinė skarda, kurios viduje rieda sunkus rutulėlis M, kuris sveria mg. Kelio dalis AB yra bet kokia kreivoji, dalis BMC apskritimo su spinduliu r lankas; taške B abi kreivosios turi vieną bendrą horizontaliąne liečiamąją. Rutulėlis ima riedėti apačion iš taško A, gulinčio ant dydžio h aukščiau taško C.



brėž. 58

Priėjęs žemiausiąjį tašką B, rutulėlis gauna didžiausį greitumą v_{max}, lygų, sulig gyvųjų jėgų dėsnio: $v_{max} = \sqrt{2g(h+2r)}$, nes jis nusileido iš savo pradinės padėties ant h+2r. Bekylant paskui vidujine /krato puse BMC rutulėlio greitumas vis mažės ir kokiame nors taške M, gulinčiam ant y žemiau C, jis bus lygus:

$$v = \sqrt{2g(h+y)} = \sqrt{2g(h+r-r\cos\alpha)},$$

jeigu kampą MOC pažymėsim α. Kolei rutulėlis glau-

sis į skardos vidujinį paviršių, pastarosios reakcija N bus nukreipta nuo M į O, o rutulėlio spaudimas į skardą D = N - nuo M į L.

Išsklaidę svorio jėgą mg į dvi: liečiamąją keliui $mg\sin\alpha$ ir statmenąją $mg\cos\alpha$ ir projektuodami greitėjimus ir jėgas į liečiamąją (judėjimo kryptim) ir statmenąją, gauname:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\alpha, \text{ arba } \frac{dv}{dt} = -g\sin\alpha, \text{ ir:}$$

$$\frac{mv^2}{r} = N + mg\cos\alpha \text{ arba } N = \frac{mv^2}{r} - mg\cos\alpha.$$

Įstatydami šičia:

$$v^2 = 2g(h+r-r\cos\alpha),$$

gauname:

$$N = mg\left(\frac{2h}{r} + 2 - 3\cos\alpha\right).$$

Taškui C, kur $\cos\alpha = 1$, turėsime:

$$N_{min} = mg\left(\frac{2h}{r} - 1\right).$$

Taškui B, kame $\cos\alpha = -1$, gausime:

$$N_{max} = mg\left(\frac{2h}{r} + 5\right).$$

Rutulėlis glausis arba spausis į vidujinį geležinės skardos lapo paviršių, jeigu $N>0$, kas matomai pareina nuo $\frac{2h}{r}$ didumo.

Pavyzdžiui, kad rutulėlis neatsiskirtų nuo kreivojo paviršiaus iki pat kelio galo C, reikia, kad

$$N_{min} = mg(\frac{2h}{r} - 1)>0, \text{ iš kur } h>\frac{r}{2}$$

Jeigu $h = \frac{r}{2}$, tai $N_{min} = 0$, didžiausias gi rutulėlio spaudimas D į kreivąjį paviršių taške B, kada rutulėlis įėjo į spindulio r ratą, bus:

$$D_{max} = N_{max} = mg(1+5) = 6mg,$$

vadinasi šešius kartus didesnis už rutulėlio svorį.

Tegu turime apskritą nejudomą cilinderį (brėž. 54) spindulio r su horizontale ašimi O, viršutiniame paviršiuje kurio padėtas sunkus rutuliukas svorio mg, pradedantis savo judėjimą cilinderio paviršiumi nuo aukštutinio taško A apačion su pradžios greitumu nulis. Rasti tašką P, arba kampą $AOP = \alpha_0$, kuriame rutuliukas atsiskirs nuo cilinderio paviršiaus ir pradės laisvai pulti parabolės dėsniu. Šiuo atvėju cilinderio reakcija N į rutuliuką nukreipta išorine cilinderio normale, o rutuliuko spaudimas į cilinderį D = N - vidujine normale į centrą O.

Projektuodami veikiančias į rutuliuką jėgas mg ir N, o taipogi greitėjimą į vidujinės normalės kryptį, gauname:

$$\frac{mv^2}{r} = mg.\cos\alpha - N,$$

iš kur:

$$N = mg.\cos\alpha - \frac{mv^2}{r}.$$

Bet:

$$v^2 = 2gy = 2g(r - r\cos\alpha) = 2gr(1 - \cos\alpha);$$

$$\frac{v^2}{r} = 2g(1 - \cos\alpha);$$

todel įstatydami gausime:

$$N = mg(3\cos\alpha - 2).$$

Taške A, $\cos\alpha$ turi didžiausios reikšmės + 1, todel čia

$$N_{max} = mg.$$

brėž. 54

Rutuliukui judant apačion kampas α vis auga, $\cos\alpha$ mažėja ir drauge su tuo mažėja N. Tuo momentu, kada N arba D pasidarys lygus nu nuliui, rutuliukas atsiskirs nuo cilinderio paviršiaus ir ims laisvai pulti. Tam reikalinga kad:

$$N = mg(3\cos\alpha_0 - 2) = 0.$$

iš kur

$$\cos\alpha_0 = \frac{2}{3}, \text{ arba } \alpha_0 = 48^\circ.$$

Išbrēžimui taško P, kuriame rutuliukas atsiskiria nuo cilinderio, dalome spindulį AO į tris lygias dalis ir išvedame gulstinę nuotolyje $\frac{2}{3}$ r nuo O. Ji kirs apskritimą ieškomame taške P, nes

$$\cos AOP = \frac{2}{3}.$$

Greitumas v, kurį rutuliukas turēs atsiskirdamas nuo cilinderio, yra palinkęs į horizontą kampu $\alpha_0 = 48^\circ$ ir turi didumą:

$$v_0 = \sqrt{2gy_0} = \sqrt{2gr(1-\cos\alpha_0)} = \sqrt{\frac{2gr}{3}}.$$

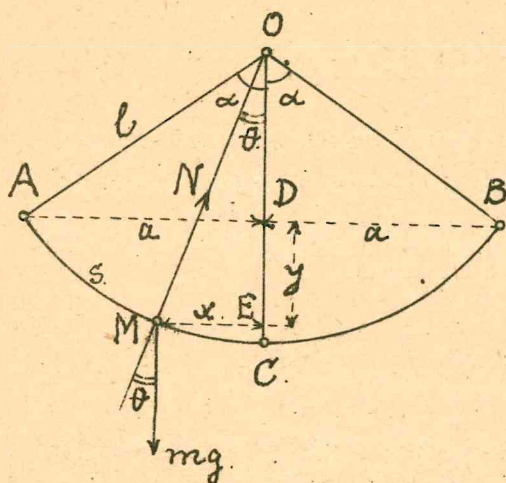
Einant tais daviniais gali būti surastas tolimesnis rutuliuko judējimas, kaipo ikipai horizontui sviesto kūno.

PAPRASTOJI, ARBA MATEMATINĒ ŠVYTUOKLĒ.

Tegu sunkus taškas M vrrčiamas judēti viduje apskrito cilinderio spindulio l, su horizontaline ašimi O (brēž. 55); be to, jis ima judēti su greitumu nulis taške A, esančiame apatinēje cilinderio pusēje.

Veikiant svorio jēgai mg ir normalinei cilinderio reakcijai N, taškas judēs vertikalinēje plokšmēje, statmenoje cilinderio ašiai. Tegu taško pradžios padētis A suvokiama kampu AOC = α ir koks nors tarpinis M - kampu MOC = θ, sudaroma taško radiusu - vektoriu MO su vertikale OC. Taške B, esančiame viename aukštume su A ir surandamame

kampu $BOC = \alpha$ su vertikale OC, judantis taškas vēl



brēž. 55

įgaus greitumą nulis ir išeis atbulą kelią BCA, paskui vēl ACB ir t.t., nutoldamas lygiais kampais α nuo vidujinēs normalēs OC. Toks taško periodinis judējimas vadinamas svyravimu. Kokioje nor nors padētyje M taško greitumas bus:

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\alpha)}.$$

Normalinē cilinderio paviršiaus reakcija N nukreipta į svyravimo ašį O; josios didumas rasis, jeigu jēgas mg ir N, o taipogi taško m greitējimą suprojektuosime į vidujine normalę:

$$\frac{mv^2}{l} = N - mg\cos\theta;$$

įstatydami čia:

$$v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\alpha),$$

gausime:

$$2mg(\cos\theta - \cos\alpha) = N - mg\cos\theta;$$

iš kur:

$$N = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha).$$

Del $\theta = \alpha$ gauname:

$$\min N = mg\cos\alpha.$$

Del $\theta = 0$ rasime:

$$\max N = mg(3 - 2\cos\alpha).$$

Taip, jeigu pradžios kampas $\alpha = 90^\circ$, tai $\min N = 0$, $\max N = 3mg$. Kadangi N visumet yra teigiamas, vadinasi, nukreiptas į ašį O, tai jėga N gali būti sudaryta netįstančio siūlo ilgumo l pasipriešinimu, įtvirtinto vienu galu O-yje, o kitame gale nešančio sunkųjį tašką m. Šito pavidalo įtaisymas vadinamas paprastąja arba matematine švytuokle, nes šičia imama domēn vien tik sunkiojo taško masē m, su siūlo gi mase visai nesiskaitoma. Nagrinēdami švytuoklēs judējimą nuo A į M, pavadinsime kelią AM, išeitą per t sekundų, per s; tada

$$s = l(\alpha - \theta) \text{ ir } ds = vdt = -ld\theta. \text{ Bet:}$$

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta-\cos\alpha)}, \text{todel } \sqrt{2gl(\cos\theta-\cos\alpha)}.dt = -ld\theta,$$

iš kur:

$$dt = -\frac{ld\theta}{\sqrt{2gl(\cos\theta-\cos\alpha)}} = -\sqrt{\frac{l}{g}}.\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}};$$

Laiko t suradimui, kuriuo taškas išējo lanką AM=S, reikia pastarasias lygtis integruoti ribose: del t nuo 0 iki t, del θ - nuo α iki θ; gausime:

$$t = -\sqrt{\frac{1}{g}}\int_{\alpha}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}};$$

Šitas integralas gali būti išsprestas galūtinai tik apytikriai, mažiems kampų α ir θ didumams. Tada galima daleisti:

$$\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1-2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1-\frac{\theta^2}{2};$$

$$\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1-\frac{\alpha^2}{2};$$

iš čia:

$$2(\cos\theta-\cos\alpha) = \alpha^2-\theta^2$$

ir reiškia:

$$t = -\sqrt{\frac{1}{g}}\int_{\alpha}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}} = \sqrt{\frac{1}{g}}\int_{\theta}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{g}}\int_{\theta}^{\alpha}\frac{d\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^2}}.$$

Bet $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$, todėl:

$$t = \sqrt{\frac{1}{g}}\left[\arcsin\frac{\theta}{\alpha}\right]_{\theta}^{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{g}}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\theta}{\alpha}\right].$$

Toks laikas reikalingas, kad taškas išeitų lanką AM. Jeigu $\theta = 0$, tai laikas, kuriuo taškas išeina lanką AC, bus:

$$t_o = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{g}}.$$

Laikas, kuriuo taškas įšeina visą lanką ACB, matomai, du kartu didesnis ir lygus:

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Laikas, kuriuo švytuoklė išeina visą kelią ACBCA ir grįžta į pradžios tašką A, lygus.

$$T = 2T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

T_1 vadinasi švytuoklės p a p r a s t ą j a, arba pavienio svyravimo laikas, T gi švytuoklės pilnojo, arba dvigubo svyravimo laikas. Formulos del T_1 ir T taikytinos tik mažiems svyravimams ribose $\alpha = \pm 5^o$; tada paklaida bus mažesnė už $\frac{1}{10000}$. Del $l = 1m$ gausime.

$$T_1 = 3,14\sqrt{\frac{1}{9,81}} = 1,003 \text{ sek.},$$

vadinasi, švytuoklė ilgumu 1 mtr. į valandą darys $\frac{3600}{1,003} = 3589$ paprastųjų svyravimų.

Švytuoklės, kurios paprastasis svyruojamasai laikas lygus 1 sek., ilgumas suvokiamas iš lygčių:

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 1 \text{ sek.},$$

iš kur:

$$l_1 = \frac{g}{\pi^2} = 0{,}994 \text{ mtr.}$$

Švytuoklēs svyravimo lygtis

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

galima parašyti šiaip:

$$g = l\frac{\pi^2}{T^2};$$

todel, eksperimentaliai suradę T_1 duotajam ilgumui l, sulig tos formulos galime išskaičiuoti svorio jēgos greitējimą duotajai žemēs paviršiaus vietai. Iš lygčių:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\theta}{\alpha}\right]$$

randame:

$$\arcsin\frac{\theta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

arba:

$$\frac{\theta}{\alpha} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{g}{l}}.t\right) = \cos\sqrt{\frac{g}{l}}.t$$

iš kur:

$$\theta = \alpha.\cos\sqrt{\frac{g}{l}}.t.$$

Padaugine abi pusi iš švytuoklēs ilgumo l, turēsi-

me:

$$l\theta = l\alpha . \cos\sqrt{\frac{g}{l}} . t,$$

arba lankas MC = lankas AC. $\cos\sqrt{\frac{g}{l}} . t$. Esant mažiems kampams α ir θ galima skaityti lankus MC ir AC atatinkamai lygiais pusiaustygoms ME = x ir AD = a; tada gausime:

$$x = a . \cos\sqrt{\frac{g}{l}} . t.$$

Šitos lygtys duoda švytuoklės mažųjų svyravimų dėsnį: x yra švytuoklės nutolimas nuo jos vidutinio padėjimo laikui t, a - vadinamas svyravimo amplituda ir yra didžiausias švytuoklės nukripimas į vieną arba kitą pusę nuo vidutinio padėjimo; jis gaunamas, kada $\cos\sqrt{\frac{g}{l}} . t = \pm 1$, vadinasi dydžiams $\sqrt{\frac{g}{l}} . t$ lygiems: 0, π; 2π; 3π... arba dėl

$$t = 0,\ \pi\sqrt{\frac{l}{g}};\ 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};\ 3\pi\sqrt{\frac{l}{g}}......$$

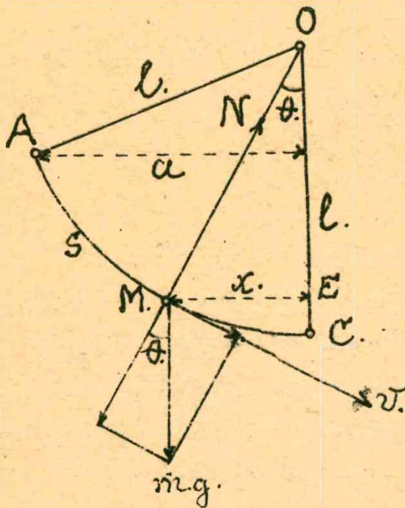
Šitie laikai skiriasi vienas nuo kito, gretutinio, dydžiu $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, reiškiančiu laiko tarpą, kuriuo taškas išeina kelią nuo vieno vidutinio padėjimo iki kito; todėl dydis

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

yra švytuoklės vieno paprastojo svyravimo laikas. Mažųjų švytuoklės svyravimų lygtis

$$x = a.\cos\sqrt{\frac{g}{l}}.t$$

galima išvesti dar paprasčiau, jei vaduotis dasileidimu apie mažuosius dydžius $\frac{x}{l}$ ir $\frac{a}{l}$.



brėž. 56

Švytuoklei judant nuo M į C (brėž. 56) į ją veikia dvi jėgos mg ir N, projektuodami šitas jėgas į švytuoklės greitumo v kryptį ir prilygindami šitų projekcijų sumą sandaugai švytuoklės masės iš švytuoklės greitėjimo projekcijos į tą pačią kryptį, gauname švytuoklės judėjimo lygtis:

$$mg.\sin\theta = m\frac{dv}{dt}.$$

Bet $\sin\theta = \frac{x}{l}$ ir $v = \frac{ds}{dt}$,

kame s = AM; kadangi švytuoklės nukripimų didumai x ir s yra maži, palyginus su josios ilgumu l, tai galima daleisti: s = a - x, vadinasi

$$v = \frac{-dx}{dt}; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{-d^2x}{dt^2};$$

Įstate gausime:

$$mg.\frac{x}{l} = -m\frac{d^2x}{dt^2}, \text{ arba } \frac{g}{l}.x + \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Tai yra mažųjų švytuoklės svyravimų diferencialinės lygtys. Tokių lygčių sprendimas arba bendrasis integralas, kaip žinoma, išreiškiamas formula:

$$x = A\cos Bt,$$

kame A ir B yra koeficientai, suvokiami iš duotosios švytuoklės judėjimo pradžios sąlygų. Kada t = = 0, tai turi būti x = a; pastatydami šituos didumus į bendrąjį integralą gauname:

$$a = A.\cos B.0 = A.$$

Tokiu būdu koeficientas A yra svyravimo amplituda a. B randame iš bendrojo integralo:

$$\frac{dx}{dt} = - AB\sin Bt. \quad \frac{d^2x}{dt^2} = - AB^2\cos Bt.$$

Pastatydami šituos reiškinius į bendrasias diferencialines lygtis gausime:

$$g/l.A\cos Bt-AB^2\cos Bt = 0, \text{ arba } A\cos Bt(g/l-B^2) = 0$$

Bet, kaip aukščiau matėme, A nelygus nuliui, cosBt negali visumet būti lygus nuliui, todel $g/l-B^2 = 0$, vadinasi $B = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Tokiu būdu bendrasai integralas surastas ir turi pavidalą:

$$x = a \cos\sqrt{\frac{g}{l}}.t.$$

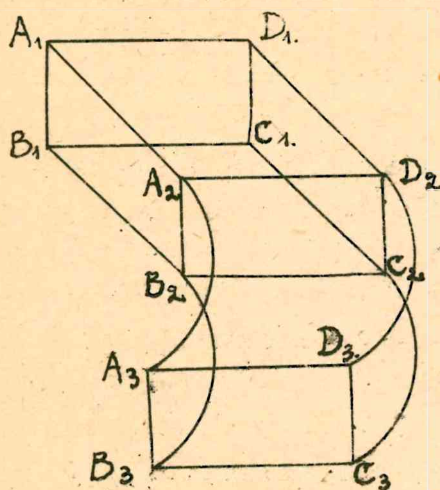
iki ne

TAŠKO RELIATYVUS JUDĒJIMAS ATŽVILGIU KŪNO, JUDANČIO ŽENGIMO JUDĒJIMU.

Koks nors daiktas (pav. stačiakampainis ABCD, (brēž. 57) slenka, jeigu bet kuri paimta jame linija (pav. kraštinē AB) visumet lieka savo pirmykščiai padēčiai lygiagretē; beslenkant visi kūno taškai aprašo tokias pat traektorijas, lygiagretes viena kitai:

$$A_1 A_2 A_3 \# B_1 B_2 B_3 \# C_1 C_2 C_3 \# D_1 D_2 D_3 \ldots\ldots$$

ir kiekvienu duotuoju momentu visi kūno taškai turi geometriniai lygius greitumus ir greitējimus.



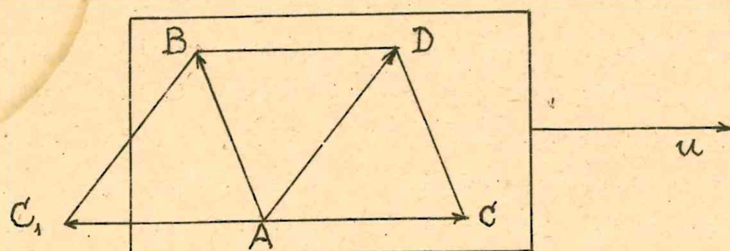
brēž. 57

Toks kūno judējimas vadinamas žengimo judējimu, kiekvienas gi kitas bendrai judējimas, kuriame kokia nors paimtoji kūne linija nelieka savo pradžios padējimui lygiagretē, turi vardą kilnojamo judējimo arba transliacijos.

Toliau kūnų judējimai bus manomi žengimo. Tegu taškas t laiku žengiančios gelžkelio platformos paviršiuje (brēž. 58) aprašo kelią AB; tuo pačiu laiku platforma nueina bēgiais kelią AC. Tada taško tikrasai judējimas laiku t išreiškiamas lygiagretainio, pastatyto iš judējimų AB ir AC diagonale AD.

Taško judējimas AB platforma vadinamas matomu,

arba reliatyviu, nes jis rodosi tokiu žiūrėtojui, stovinčiam judančioje platformoje.



brėž. 58

Tikrasis, arba absoliutinis taško judėjimas AD yra reliatyvaus jo judėjimo AB platformoje ir pastarosios slenkimo AC geometrinė suma. Kad iš taško tikrojo judėjimo AD ir daikto žengimo AC, kuriuo jis juda, gauti taško reliatyvų judėjimą AB daikto atžvilgiu, reikia tik tikrąjį judėjimą AD išsklaidyti žengiamuoju AC ir ieškomuoju reliatyviu AB, kas lengviausiai padaroma trikampio ADB statyba, išvedant iš taško D liniją DB lygią ir lygiagrete AC, bet priešingos pakraipos, ir tuo būdu gauname tašką B, o tuo pat ir taško matomą judėjimą AB. Tuo būdu galime pasakyti, kad taško reliatyvus judėjimas yra tikrojo jo judėjimo ir atbulo daikto žengimo judėjimo geometrinė suma, kas matoma iš lygiagretainio $ADBC_1$ statybos, kame $AC_1 = - AC$ ir AB yra diagonalė.

Aukščiau pasakytąji galima taikyti ir kreivaeigio, reliatyvaus ir slenkančio judėjimo nuotikiui, nes šiuo atvėju atkarpos AB, AC ir AD bus stygos tųjų lankų, kurie išeinami per laiką t tašku, arba daiktu.

Anksčiau buvo parodyta, kad greitumų ir greitėjimų sudėtis, jeigu taško ant kūno reliatyvi trajektorija juda žengiamai, daroma taip pat, kaip ir taško judėjimų sudėtis; todel taško judėjimo kūnu, kuris pats žengiamai juda, nuotikiui gauname se-

kančią teoremą judėjimų, greitumų ir greitėjimų sudėčiai:

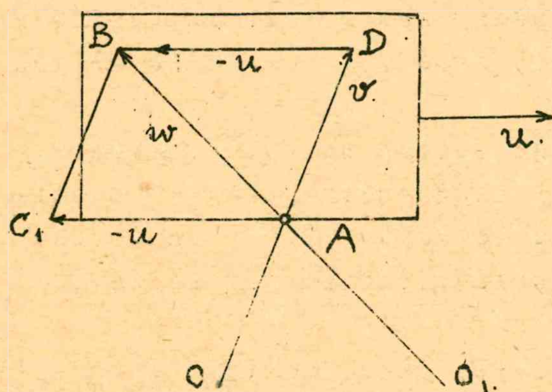
Taško reliatyvus judėjimas daiktu, kuris juda žengiamai, yra geometrinė taško absoliutinio judėjimo ir daikto atbulo žengimo judėjimo suma; taško reliatyvaus judėjimo greitumas w ir greitėjimas q lygus geometrinėms atatinkančių absoliutinio judėjimo greitumo v ir greitėjimo p ir atbulųjų kilnojamojo žengimo daikto judėjimo greitumo - u ir greitėjimo - r sumoms:

$$\bar{w} = \bar{v} - \bar{u} \quad \text{ir:} \quad \bar{q} = \bar{p} - \bar{r}$$

$$\bar{v} = \bar{w} + \bar{u}, \text{ iš kur: } \bar{w} = \bar{v} - \bar{u},$$

$$\bar{p} = \bar{q} + \bar{r}, \text{ iš kur: } \bar{q} = \bar{p} - \bar{r}.$$

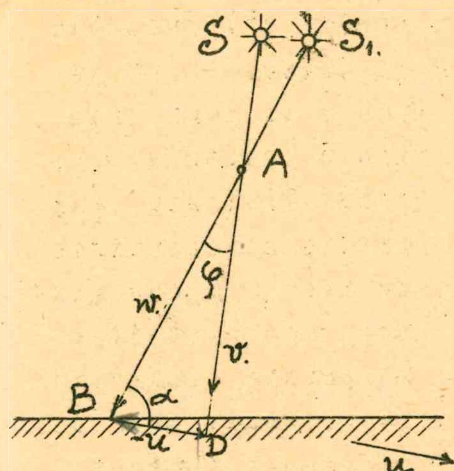
Pavyzdžiai: 1) Akmuo, sviestas iš taško O horizontaliai (brėž. 59) su greitumu v platformos paviršiumi, kuri juda greitumu u, turės, platformos atžvilgiu (reliat. į platformą) greitumą w, kuris gausis, kaipo paralelagramo ADBC, pastatyto iš greitumų v = AD ir -u= = AC diagonalė AB, arba kaipo trikampio ABD, sudaryto iš greitumų v = AD ir - u = DB uždaromoji AB. Žiūrėtojui, stovinčiam platformoje, rodysis, kad akmuo yra sviestas kryptimi O_1A, ir jo kelias skersai platformos, jeigu v ir u yra pasto-



brėž. 59

vūs, sutaps su linija AB.

2) Šviesos spindulys, kuris krenta į žemę iš kokios nors žvaigždės S (brėž. 60) greitumu v = = 300000 km/sek. sutinka žemės paviršių, kuris turi absoliutinį sukimosi apie saulę greitumą u = = 29,3 km/sek. (žemės su sukimosi apie savo ašį greitumas žemės paviršiui apie akvatorių nedidesnis už 0,4 km/sek ir todėl gali būti nepaisomas) Tokiu būdu žemės gyventojui matomasai reliatyvus žvaigždės spindulio greitumas w turi kryptį AB, kuri, kaip matoma iš greitumų trikampio ABD, yra atsilenkusi kampu φ nuo savo tikrosios krypties AD žemės judėjimo pusėn, nes mes matome žvaigždę kryptimi BAS_1, kuriąja puola į mumis josios spinduliai. Kadangi.



brėž. 60

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{u}{v},$$

vadinasi

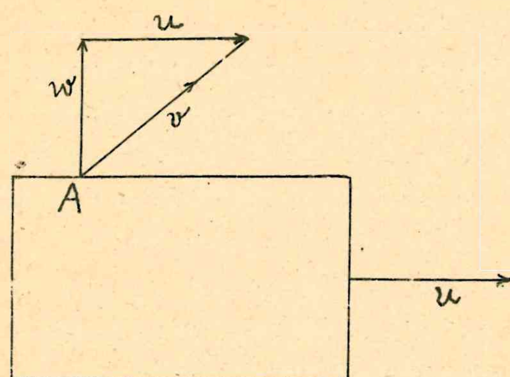
$$\sin\varphi = \sin\alpha . \frac{u}{v},$$

tai didžiausį atsilenkimą pirmyn (φ_{max}) spindulys turi tada, kada $\alpha = 90^\circ$, reiškia, kada jis yra statmenas žemės apie saulę judėjimo greitumui. Šiuo atvėju

$$\sin\varphi = \frac{29.3}{300000} = 0.000096,$$

iš kur φ = 20'. Toks žvaigždžių spindulių atsilenkimas nuo jų tikrosios krypties vadinamas šviesos aberacija. Ji lygi nuliui tiktai tiems spinduliams, kurie krenta į žemės paviršių absoliutinio judėjimo erdvėje duotojo žemės taško greitumo kryptimi.

3) Jeigu iš vagono lango A (brėž. 61) judančio greitumu u, bus mestas statmenai keliui akmuo masės m su horizontaliniu greitumu w vagono atžvilgiu, tai akmens absoliutinis greitumas v bus gautas, kaipo stačiakampainio sudaryto iš greitumų w ir u, diagonalė, būtent, $v = \sqrt{w^2+u^2}$. Šito akmens pramušančioji jėga išsireiškia jo kinematine energija arba gyvąja jėga



brėž. 61

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(w^2+u^2)$$

kuri, kaip matome, pareina nuo vagono greitumo u. Pav. jeigu greitumas w = 10 mtr./sek., u = 20 mtr./sek. tai

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(10^2+20^2) = \frac{m.10^2}{2}(1+4),$$

vadinasi, penkius kartus didesnė už gyvąją jėgą, kuri atatinka tam greitumui w = 10 m/s, kuris buvo suteiktas akmeniui metusio jį asmens. Jeigu į tą patį, judantį su greitumu u = 20 m/s, vagoną (brėž. 62) bus sviestas iš oro akmuo su gulsčiu greitumu v = 10 m/s, tai akmens reliatyvus grei-

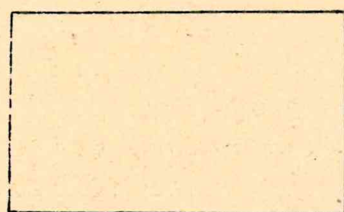
tumas w vagono atžvilgiu, su kurio siena jis susidaužs, bus stačiakampainio, sudaryto iš greitumų $v = 10$ m/s ir $-u = -20$ m/s, diagonalė, vadinasi,

$$w = \sqrt{v^2+u^2} = \sqrt{10^2+20^2},$$

akmens dūžio į vagoną gyvoji jēga išsireikš

$$\frac{mw^2}{2} = \frac{m}{2}(10^2+20^2) = \frac{m.10^2}{2}(1+4),$$

vadinasi, taipogi penkius kartus didesnē už gyvąją jēgą dūžio tokio pat akmens, mesto tuo pačiu greitumu į stovintį daiktą. Iš čia mes galime spresti apie pavojų metant akmenis iš greitai judančio vagono, arba į taip pat judartį vagoną.



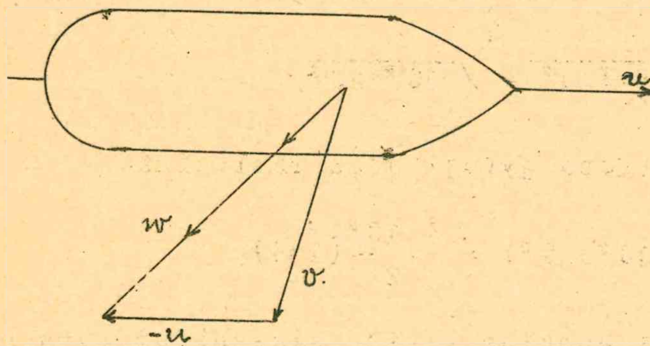
brēž 62

Nesunku pastebēti, kad akmuo mestas su greitumu $v = 10$ m/s statmenai keliui iš vieno judančio greitumu $u = 20$ m/s traukinio į kitą judantį priešinga kryptim greitumu $u_1 = 30$ m/s turētų pastarojo atžvilgiu greitumą

$$w_1 = \sqrt{v^2+u^2+u_1^2} = \sqrt{10^2+20^2+30^2} = 10\sqrt{1+4+9},$$

ir jo dūžio į antrąjį traukinį gyvoji jēga $\frac{mw_1^2}{2}$ būtų 14 kartų didesnē už gyvąją jēgą $\frac{mv^2}{2}$, suteiktą akmeniui asmens, sviedusio jį iš pirmojo traukinio

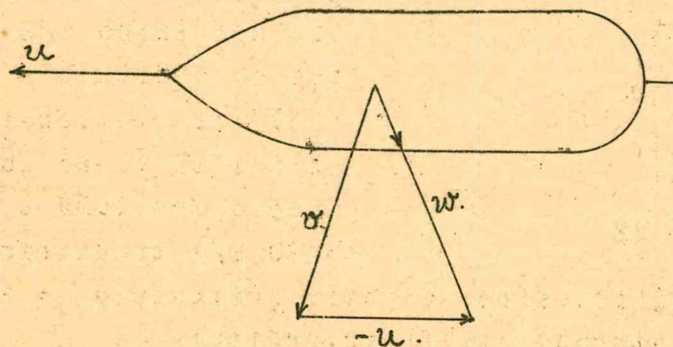
4) Vēliavos padētis laivo, plaukiančio su greitumu u, stiebe, kurį pučia šoninis vējas su greitumu v, pareina nuo to reliatyvaus greitumo w, kurį turi vējas laivo atžvilgiu; vēliava nukrypsta šito reliatyvaus greitumo kryptimi:



brēž. 63

$$\overline{w} = \overline{v} - \overline{u}$$

(brēž. 63). Todei pučiant tam pačiam vējui, padētis vēliavų dviejuose plaukiančiuose priešingomis kryptimis laivuose bus nevienoda.



brēž 64

(brēž. 63 ir 64), iš kur seka, jog negalima spresti apie tikrają vējo kryptį iš vēliavos padēties plaukiančiame laive.

TAŠKO RELIATYVAUS (MATOMO) JUDĒJIMO GREITĒJIMAS

Jeigu: p - taško absoliutinio (tikrojo) judējimo greitējimas,

q - taško jo traektorija reliatyvaus (matomo) ju-

dējimo greitējimas;
r – žengiamojo traektorijos judējimo greitējimas, tai, kaip aukščiau matėme:

$$\overline{p} = \overline{q} + \overline{r},$$

iš kur gausime

$$\overline{q} = \overline{p} - \overline{r} = \overline{p} + (-\overline{r}),$$

vadinasi, reliatyvaus judējimo greitējimą galima gauti kaip geometrinę absoliutinio taško judējimo greitējimo ir atbulo traektorijos žengiamojo judējimo greitējimo sumą. Padauginę šitas lygtis iš taško masės m, gauname

$$\overline{mq} = \overline{mp} + (-\overline{mr})$$

Tikroji jėga P = mp suteikia taškui m tikrąjį greitējimą p, jėgą Q = mq, suteikiančią taškui matomą greitējimą q jojo reliatyviam judējime išilgai traektorijos, galima todėl pavadinti matoma (besirodančia) taško reliatyvaus judējimo jo traektorija jėga; jėgą $-\overline{R}$ = mr vokiečiai vadina papildančia jėga (Ergänzungskraft) taško matomam judējimui, o aukščiau parašytasias lygtis skaito šiaip: besirodanti jėga Q = mq taško reliatyviam judējime lygi geometrinei sumai tikrosios jėgos P = mp ir papildančiosios jėgos $-\overline{R} = -\overline{mr}$ $\overline{Q} = \overline{P} - \overline{R}$

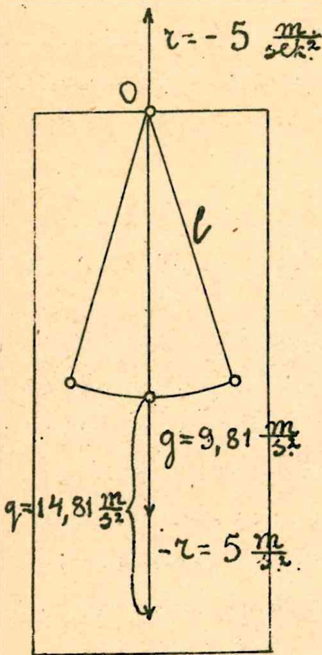
Pavyzdžiai 1) Laisvas sunkus taškas krenta dėžėje, kuri pati turi greitējimo judējima vertikale aukštyn su greitējimu $r = -5$ m/s^2 Puolančiojo taško tikrasis greitējimas yra $p = g = 9,81$ m/s^2 ir yra nukreiptas vertikale žemyn, matomas taško greitējimas dėžėje bus (dėžės greitējimas r

turi minuso ženklą, nes yra nukreiptas prieš greitėjimą g):

$$\overline{q} = \overline{g} - (-\overline{r}) = 9,81+5 = 14,81 \text{ m/sek}^2$$

(Visų trijų greitėjimų kryptys sutuola).

Žiūrėtojui, kuris būtų dėžėje, rodytusi, kad taškas krenta su padidintu greitėjimu 14,81 m/s^2, negu normalinis 9,81 m/s^2, tarytum įveikiamas besirodančios jėgos $C = m(14,81)$. Jeigu tašką m pakabinti ant virvelės ilgumo l prie dėžės lubų (brėž. 65), kuri juda aukštyn su greitėjimu r, tai $q = g+r$, ir tokios švytuoklės mažųjų svyravimų dėsnis išsireikš formula:



brėž. 65

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g+r}} = \pi\sqrt{\frac{l}{14,81}} \text{ sek.}$$

vadinasi, švytuoklės svyravimai bus greitesni, negu nejudančioje dėžėje. Atbulai, jeigu dėžė su sunkiuoju tašku m juda apačion su greitėjimu $r = 5$ m/s^2, tai $-r$ bus nukreipta aukštyn, o todel taško matomas greitėjimas dėžėje bus:

$$q = g-r = 9,81 - 5 = 4,81 \text{ m/s}^2,$$

vadinasi taško besirodantis svoris dėžėje, arba siūlo, ant kurio taškas pakabintas, įtempimas bus:

$$Q = mq = m.4,81 \text{ kgr.}$$

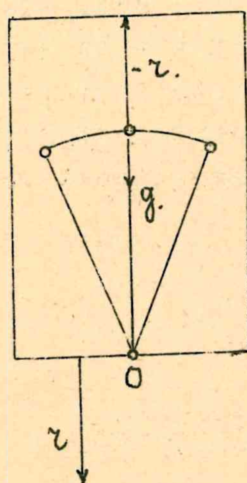
ir tokio kūno paprastojo svyravimo periodas yra:

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g-r}} = \pi\sqrt{\frac{l}{4,81}} \text{ sek.}$$

Jei dėžė kristų žemyn su greitėjimu, lygiu $g = 9,81$ m/s², tai turėsime:

$$q = g-g = 0; \quad Q = 0;$$

taškas neturėtų dėžės atžvilgiu jokio greitėjimo, taško spaudimas į dėžės dugną būtų lygus nuliui; pakabintas ant siūlo prie dėžės lubų materialinis taškas visai neįtemptų siūlo ir negalėtų būti švytuokle, nes jo svyravimo periodas T_1 būtų lygus $\pi\sqrt{\frac{l}{0}} = \infty$. Jeigu dėžė juda stačiai žemyn su greitėjimu $r > g$, tai taško matomas greitėjimas dėžės atžvilgiu bus:



brėž. 66

$$q = g-r = -(r-g),$$

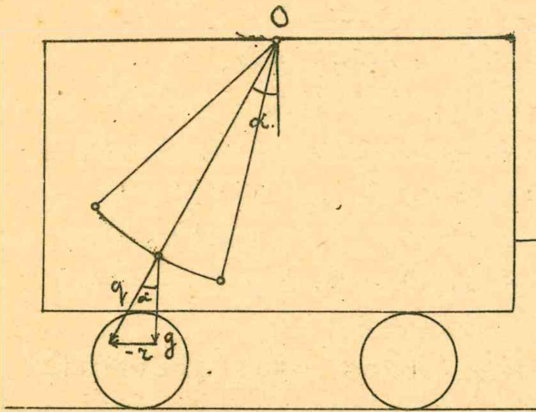
vadinasi, jis nukreiptas aukštyn; taškas dėžėje kris aukštyn, nuo dugno į lubas (brėž. 66); siūlo ištempimas, arba taško spaudimas į dėžės lubas bus

$$Q = mq = -m(r-g)$$

ir nukreiptas aukštyn; pastumėjus iš šono taškas svyruos ant siūlo apie O su periodu

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{r-g}}.$$

Tegu materialinis taškas m randasi vagone, kuris juda horizontaliai su nukreiptu dešinėn greitėjimu r (brėž. 67); taško matomas greitėjimas q vagono atžvilgiu bus:



brėž. 67

$$q = \sqrt{g^2+r^2}$$

ir yra atsilenkęs nuo vertikalės kampu α, kurio tangentas $tg\alpha = -\frac{r}{g}$, kairėn, vadinasi, vagono greitėjimo atvirkščia kryptimi; tokiu pat kampu α atsilenkia nuo vertikalės kairėn ir siūlas, kuriuo prikabintas materialinis taškas prie vagono lubų; apie tą pačią lygsvaros padėtį vyks ir mažieji švytuoklės svyravimai su periodu

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

MATERIALINIŲ TAŠKŲ LYGSVARA TOLYGINIAI SUKAMAME KŪNE.

Jeigu sunkus kūnas sukasi apie nejudamą ašį O_1O_2 (brėž. 68), tai kiekvienas kūno taškas A, kuris randasi nuotolyje AO = r nuo ašies, aprašo radiuso r apskritimą normalinėje ašiai O_1O_2 plokšmėje.

Jeigu kiekvienam laiko momentui yra žinomas kelias $s = A_0A$, duotojo taško išeitas, skaitant nuo jo pradžios padėties A_0, vadinasi yra žinoma funkcija s = f(t), tai, jeigu r duotas, taško A,

o taipogi ir paties kūno judėjimas pilnai apspręstas.

Taško greitumas surandamas:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t);$$

bet iš kitos pusės mes turime: $s = r.\theta$, kame

$$\theta = A_0OA,$$

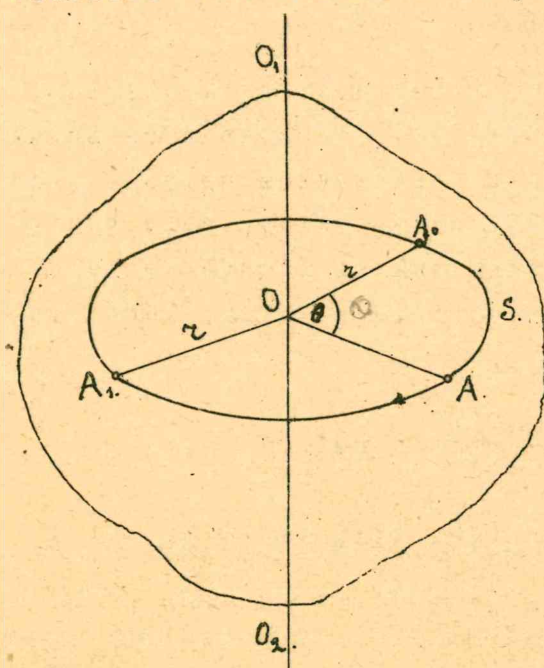
matuojamas radianais; reiškia

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt};$$

išvestinė

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

vadinasi kūno sukimosi kampiniu greitumu ir, jeigu kūnas sukasi tolyginiai, reiškia radianais kampą, kuriuo per laiko vienetą pasisuko kūnas.



brėž. 68

Kadangi

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{f(t)}{r}, \text{ tai:}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{f'(t)}{r} = \frac{v}{r}.$$

Pavyzdžiui jeigu kūnas per sekundą apsisuka penkius

kartus, arba per minutę 5×60 = 300 kartų, tai jo sukimosi kampinis greitumas

$$\omega = 5 \times 2\pi \frac{\text{radianų}}{\text{sekundė}},$$

arba trumpiau 10π 1/sek., (nes radianas yra atitrauktinis vienetas) arba

$$\omega = 300 \times 2\pi \frac{1}{\text{minutė}}.$$

Reikia atminti, kad priimtasai analize naturalus kampų ňatas radianas yra kampas, atatinkantis lankui, kurio ilgumas lygus spinduliui r; kadangi visas apskritimas 2πr atatinka kampui 2π arba matuojant laipsniais 360°, tai spindulys r atatinka radianui, arba

$$\frac{360^{\circ}}{2\pi} = 57^{\circ},3$$

laipsnių matu.

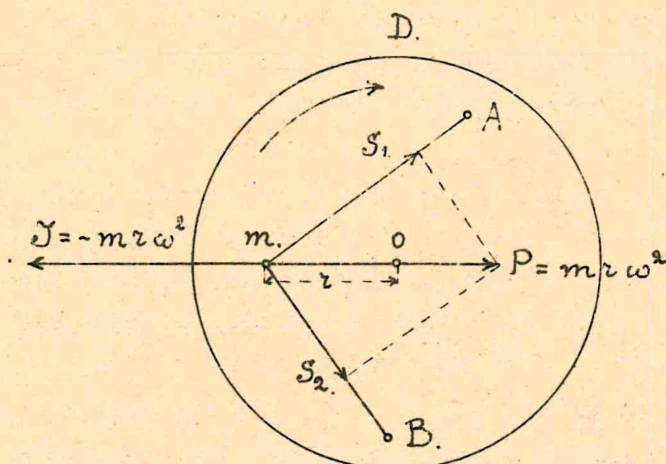
Jeigu taškas sukasi tolyginiai su kampiniu greitumu ω apie nejudamą ašį, ir koks nors materialinis taškas randasi reliatyvios ramybės stovyje ant kūno nuotolyje r nuo ašies, apie kurią sukasi kūnas, tai taškas sukasi drauge su kūnu apie tą pačią ašį su greitumu $v = r.\omega$, turėdamas įcentrinį greitėjimą

$$\frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2.$$

Reiškia, jeigu taškas turi masę lygią m, tai į jį veikia jėga

$$P = m.r.\omega^2$$

nukreipta į taško aprašomojo apskritimo centrą. Pavyzdžiui, jeigu sunkusis rutulys masės m (brėž. 69) randasi reliatyvios ramybės stovyje ant gulsčiojo disko O, kuris sukasi su kampiniu greitumu ω apie vertikalinę ašį O, tai kad sulaikius rutulį ant disko nuotolyje r nuo centro O, reikalinga jėga $P = mr\omega^2$, kuri gali būti sudaryta įtempimais S_1 ir S_2 dviejų siūlų, jungiančių rutulį su disko dviem taškais A ir B:



brėž. 69

$$\overline{P} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2.$$

Kadangi rutulio inercijos išcentrinė jėga

$$I = -mr\omega^2 = -P,$$

tai reiškia $\qquad P = -I,$

iš kur:

$$-\overline{I} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2, \text{ arba: } \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{I} = 0,$$

reiškia, kad sulaikius tašką ant kūno, besisukančio apie ašį, prie taško turi būti pridėtos tokios jėgos, kurios atsvertų sunkiojo taško inercijos jėgą. Jeigu diskui su rutuliuku besisukant, siūlai

rišantieji rutuliuką su taškais A ir B būtų perpiauti, tai tuo pačiu momentu išnyktų jėgos S_1 ir S_2, o taipogi jų atstojamoji $F = mr\omega^2$, kuri suteikia taškui įcentrinį greitėjimą $r\omega^2$ ir iššaukia lygią priešingai nukreiptą inercijos jėgą $I = - mr\omega^2$; todėl tuo pačiu momentu taškas, atsikratęs visų jėgų veikimo, be svorio jėgos, spaudžiančios jį į diską, ims iš inercijos judėti greitumu $v = r\omega$ apskritimo, kurį ji aprašydavo, būdama pritvirtinta ant disko, liečiamosios kryptimi.

brėž. 70

P a v y z d i s. Prie stačio veleno, kuris sukasi pakakliuose M ir L (brėž. 70) įkipai pritvirtintas kampu β šerdesas AB, kuriuo gali slinkti be trynimosi sunkusis rutuliukas masės m. Į rutuliuką veikia vertikalinė svorio jėga mg ir šerdesui statmena jojo reakcija N, kurios velenui nesisukant, viena kitos neatsveria, o todėl rutuliukas smunka apačion prie taško A; jeigu gi ašis ML su šerdesu AB sukasi, prie tų dviejų jėgų prisijungia rutuliuko inercijos jėga $I = - mr\omega^2$, ir dėl to, kai kuriems didumams β, ω ir r trys jėgos mg, I ir N gali atsidurti lygsvaros

stovyje ir rutuliukas rasis reliatyvios ramybēs padētyje ant besisukančio šerdeso AB. Tokios lygsvaros sąlygos randamos iš jēgų mg, I ir N trikampio, būtent:

$$tg\beta = \frac{mg}{mr\omega^2} = \frac{g}{r\omega^2}; \quad \text{iš kur:} \quad r = \frac{g}{\omega^2 tg\beta}.$$

Iš čia matoma, kad juo didesnis ω, vadinasi, juo greičiau sukasi šerdesas AB, tuo mažesnis r, reiškia, tuo arčiau prie ašies MN turi prisiartinti rutuliukas, kad būti reliatyvios ramybēs stovyje ant šerdeso; pav., kada $\beta = 45^0$, $tg\beta = 1$, jeigu šerdesas daro vieną apsisukimą į sekundą, tai

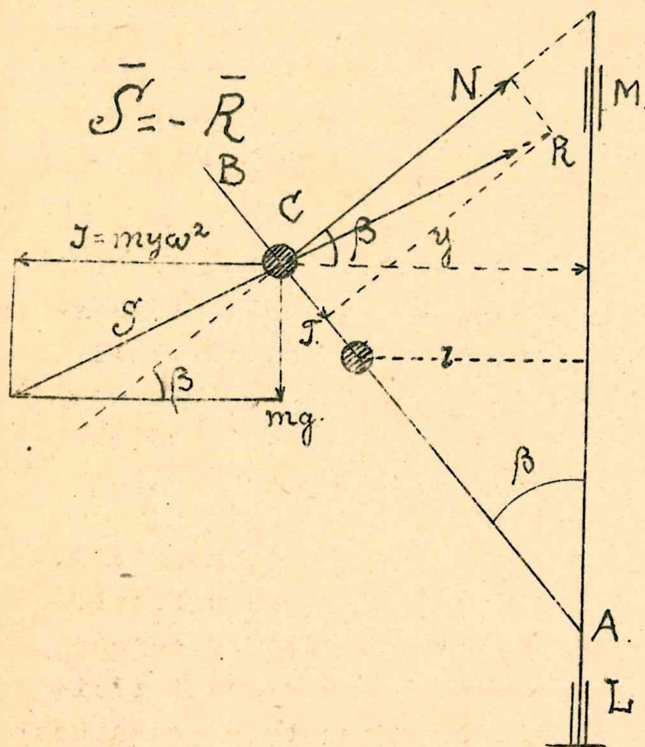
$$\omega = 2\pi \ 1/\text{sek. ir } r = \frac{9,81}{1 \times 4\pi^2} = 0,25 \text{ metr.}$$

bet jeigu šerdesas daro į sekundą 5 apsisukimus, tai

$$\omega = 5 \times 2\pi \ 1/\text{sek. ir } r = \frac{9,81}{100\pi^2} = 0,01 \text{ mtr.}$$

Jeigu prie duotojo kampinio sukimosi greitumo ω, rutuliukas bus didesniame nuotolyje y nuo sukimosi ašies, negu $r = \frac{g}{\omega^2 tg\beta}$, tai inercijos išcentrinē jēga $I = my\omega^2$ bus didesnē už $mr\omega^2$ ir jēgų I ir mg atstojamoji S atsilenks nuo statmens į šerdesą (brēž. 71) ir, nesant trinimosi, šerdeso normalinēs reakcijos N nebus atsverta, o trauks rutuliuką išilgai pastarojo aukštyn. Kad neleidus rutu-

liukui kilti aukštyn, reikia paveikti į jį sulaikančiąją jėgą T, kuri drauge su šerdeso normaline reakcija N atsvertų jėgą S.



brėž. 71

Rutuliuko ant sukamo lygaus šerdeso AB lygsvaros lygtis galima parašyti šiaip: (brėž. 70)

$$r\,tg\beta = \frac{g}{\omega^2}; \text{ bet:}$$

$$r\,tg\beta = h,$$

iš kur seka, kad $h = \frac{g}{\omega^2}$ yra pastovus dydis duotajam sukimosi kampiniam greitumui ω ir keičiantis r bei β.

Sita išvada statinės kūginės švytuoklės savybės, nes nagrinėjamasai mechanizmas identiškas su kūginę švytuoklę (žiūrėk toliau).

Jeigu šerdesas AB, kuriuo slenka rutuliukas, turi spindulio l apskritimo pavidalą (brėž. 72), tai aukščiau padarytosios išvados lieka galioje ir turime sekančią rutuliuko ant besisukančio šerdeso lygsvaros sąlygą:

$$y = \frac{g}{\omega^2\,tg\beta}, \text{ arba } y\,tg\beta = h = \frac{g}{\omega^2}.$$

Tokiu būdu dydis h yra atvirkščiai proporcingas kampinio greitumo ω kvadratui ir todel panašūs prietaisai vartojami mašinų sukimosi greitumo nustatymui bei regulistorių įtaisymui (t.v. iščentrinē švytuoklē). Tam tikslui lanko pavidalo šerdesą AB pakeičia dviem stiebais CO ir C_1O ilgumo l, su sunkiais rutuliukais

brēž. 72

ant galų; stiebai sujungti šarnirais su sukama ašim ML; mainantis greitumui ω rutuliukai išsiskečia arba artēja ir mainosi h, sulig kurio sprendžia apie ω didumą.

Rasim toki šerdeso AB pavidalą (brēž. 73), kad duotajam kampiniam greitumui ω rutuliukas kiekvienoje besisukančio šerdeso vietoje C būtų lygsvaroje. Tam reikalinga, kad rutuliuko ant šerdeso lygsvaros salyga:

brēž. 73

$$y.\mathrm{tg}\beta = \frac{g}{\omega^2}$$

turētų vietos visiems y ir

$tg\beta$ didumams.

Pažymėdami taško C koordinatas: $x = AD$ ir $y = CD$ ir pastebėję, kad

$$tg\beta = \frac{dy}{dx},$$

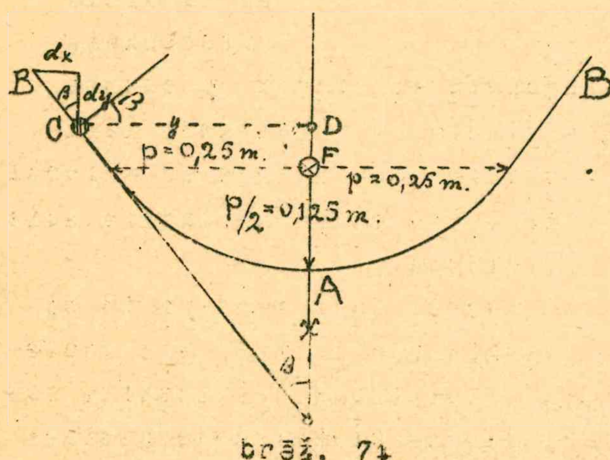
randame, įstatę:

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{g}{\omega^2}, \text{ arba } ydy = \frac{g}{\omega^2} dx.$$

Integruodami nuo 0 iki y ir atatinkamai nuo 0 iki x, gausime:

$$y^2 = 2\frac{g}{\omega^2}x$$

- parabolos lygtys su vertikaline ašimi parametro $p = \frac{g}{\omega^2}$ ir viršūne taške A. Pavyzdžiui, jeigu šerdesas AB daro vieną apsisukimą per sekundą, tai



brėž. 71

$$\omega = 2\pi \text{ 1/sek}$$

ir parabolos parametras lygus:

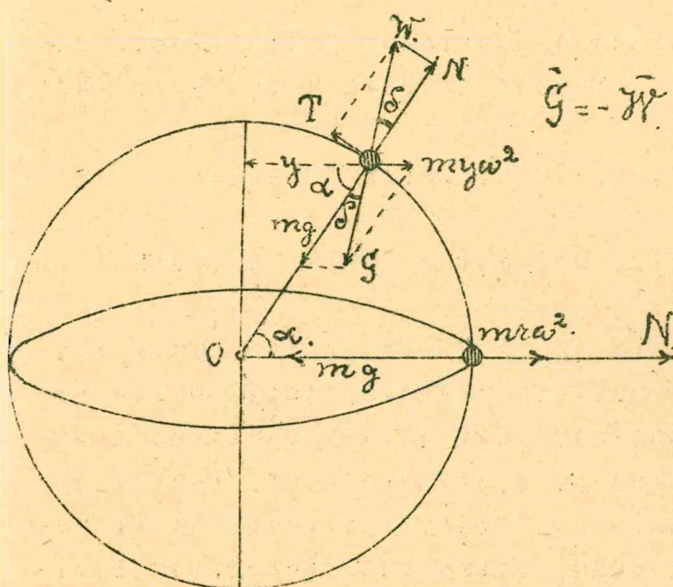
$$\frac{g}{\omega^2} = \frac{9,81}{4\pi^2} = 0,25 \text{ mtr.}$$

(brėž. 71).

ŽEMĖS SUKIMOSI APIE SAVĄJĄ AŠĮ ĮTEKMĖ Į KRENTANČIŲ KŪNŲ TARIAMA (RELIATYVU) SVORĮ IR TARIAMĄ GREITĖJIMĄ.

Tegu žemė yra rutulys spindulio r = 6370 klm. = 6370000 mtr.

Ištirsime sunkiojo taško masės m, esančio pas pusiaują, lygsvarą (brėž. 75). Jis randasi tariamos, arba reliatyvios ramybės stovyje ant besisukančios žemės. Todel šitam taškui atsisveria sekančios trys jėgos: žemės trauka mg, žemės paviršiaus normalinė reakcija N ir inercijos išcentrinė jėga $mr\omega^2$, kame ω - žemės sukimosi kampinis greitumas:



brėž. 75

$$mg = N + mr\omega^2,$$

iš kur:

$$N = mg - mr\omega^2.$$

Bet normalinė reakcija N matuojama spaudimu G sunkiojo kūno į gulsčią padėklą, pav. į svarstyklių taurelę; kitaip sakant, N lygi ir priešingai nukreipta kūno tariamąjam (reliatyviam) svoriui G, 0° platume (pas pusiaują), o $\frac{N}{m} = \frac{G}{m}$ yra pusiaujuje stebimas svorio jėgos greitėjimas g_0; tuo būdu

$$\frac{N}{m} = g_0 = g - r\omega^2.$$

Rasim $r\omega^2$ didumą. Vieno žemės pilnojo apsisukimo apie ašį laikas (žvaigždžių para) lygus 23 val. 56 min. 4 sek. = 86164 sek. vidutinio laiko; todel

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}000073 \ 1/\text{sek.};$$

reiškia:

$$r\omega^2 = 6370000 \times 0{,}000073^2 = 0{,}034 \ \text{mtr./sek}^2.$$

Bet stebimas pusiaujuje tariamas greitėjimas, matuojant švytuoklės mažųjų svyravimų laiką, lygus:

$$g_0 = 9{,}780 \ \text{mtr./sek.}^2, \text{ todel}$$

$$g = g_0 + r\omega^2 = 9{,}780 + 0{,}034 = 9{,}814 \ \text{mtr./sek.}^2$$

yra tikrasis svorio jėgos greitėjimas, kuris veiktų visose žemės rutulio vietose, jeigu pastarasis nesisuktų; poliuje (ašigalyje) tariamas greitėjimas lygus tikrajam 9,814 mtr/sek^2. Tariamąjį greitėjimą g_0 pusiaujuje galima išvesti iš tikrojo g ir sekančiu būdu, taikytinu, griežčiau išsireiškus, tik tariamajam mg_0 ir tikrajam mg kūno svoriams: krentančio ekvatoriuje kūno tikrasis greitėjimas

$$p = g = 9{,}814 \ \text{mtr./sek.}^2$$

ir nukreiptas į žemės centrą; žemės paviršiaus transliacijos greitėjimas r ekvatoriuje lygus į įcentriniam greitėjimui

$$r\omega^2 = 0{,}034 \ \text{m/sek.}^2$$

ir taipogi nukreiptas į žemės centrą; reiškia tariamasis arba reliatyvus žemės paviršiaus atžvilgiu krentančiojo ekvatoriuje kūno greitėjimas g lygus tų greitėjimų skirtumui:

$$c = p - r \text{ arba } g_0 = g - r\omega^2 = 9{,}814 - 0{,}034 = 9{,}780 \text{ m/s}^2.$$

Kokiame nors platume α (brėž. 75) esantis žemės paviršiuje sunkus kūnas yra lygsvaroje trijų jėgų įtakoje: žemės traukos mg, nukreiptos į žemės centrą, inercijos išcentrinės jėgos $my\omega^2$, nukreiptos kūno aprašomosios paralelės spindulio tąsos kryptimi ir žemės paviršiaus reakcijos W; kadangi pirmųjų dviejų jėgų didumai ir kryptys žinomi, tai ir trečiosios jėgos W didumas ir kryptis gali būti surasti. Tam tikslui išskleidžiame ją dviem sudedamosiomis: žemės paviršiui statmeną N ir liečiamą T; projektuodami visas tris jėgas mg, $my\omega^2$ ir W į statmenį ir liečiamąją žemės rutuliui bei pastebėję, kad paralelės spindulys lygus:

$$y = r.\cos\alpha,$$

randame:

$$N + my\omega^2.\cos\alpha = mg, \text{ arba:}$$

$$N = mg - mr\omega^2\cos^2\alpha = m(g - r\omega^2\cos^2\alpha).$$

$$T = my\omega^2.\sin\alpha = mr\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = mr\omega^2\frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Iš tų jėgos W sudaromųjų, pirmoji

$N \geq m(9{,}814 - 0{,}034)$ arba $N \geq m.9{,}78$; antroji gi

$$T \leq m.0,034.\frac{1}{2} \text{ (del } \alpha = 45^o\text{); todel}$$

$$\frac{T}{N} \leq \frac{0,017}{9,78} \text{ arba } \frac{T}{N} \leq \frac{1}{575};$$

Kadangi W yra stačiakampio trikampio įžambinė, kurio statiniai (katetai) yra N ir T, tai esant tiek mažam santykiui tarp pastarųjų įžambinės W ilguma galima su dideliu tikslumu priimti lygiu N, vadinasi, daleisti:

$$W = m(g-r\omega^2\cos^2\alpha).$$

Bet W yra jėga lygi ir priešingai nukreipta tariamajam kūno svoriui G, o

$$\frac{W}{m} = \frac{G}{m}$$

yra svorio jėgos platume α tariamasis greitėjimas g_α; todel:

$$g_\alpha = g-r\omega^2\cos^2\alpha = g-r\omega^2+r\omega^2\sin^2\alpha.$$

Bet:

$$g-r\omega^2 = g_o = 9,780 \text{ mtr/sek}^2$$

reiškia:

$$g_\alpha = 9,780+0,034.\sin^2\alpha = 9,780+0,034.\frac{1-\cos^2 2\alpha}{2} =$$

$$= 9,797-0,017\cos 2\alpha.$$

Tariamasis svoris $G = W$ didumui ir kryptimi ata-

tinka siūlo įtempimui, ant kurio pakabintas sunkusis taškas masės m. Kadangi bendrai imant W nesupuola su normaline jėga N, tai ir svambalo kryptis neeina per žemės centrą, vien tik ekvatoriuje ir poliuose, kur

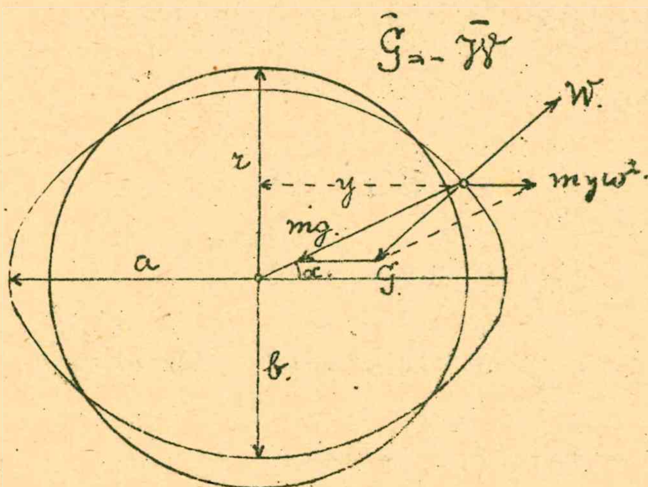
$$T = mr\omega^2\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

lygi nuliui (nes α = 0 arba 90°).

Didžiausias svambalo atsilenkimas δ nuo žemės rutulio spindulio atatinkantis Tmax bus, kaip matėme, prie platumo α = 45°, lygus

$$\max\delta = \frac{T_{45^0}}{N_{45^0}} = \frac{1}{576} = \text{arcus}6'.$$

Jeigu žemė turėtų taisyklingą rutulio pavidalą, tai kūno svoris G, atsilenkęs nuo žemės rutulio paviršiaus normalės, verstų visas dujas ir skysčius žemės paviršiuje slinkti nuo polių į ekvatorių iki tam laikui, kol žemės rutulio forma nepasikeistų tiek, artėdama prie sukimosi elipsoido, (brėž. 76), kad kūno tariamasis svoris G, arba tikrojo svorio mg ir inercijos iš-



brėž. 75

centrinės jėgos myω² atstojamoji bus statmena žemės paviršiui. Tokį tai pavidalą įsigijo žemė, būdama dar skystu kūnu ir dabar svambalas yra griež-

tai statmenas jūros paviršiui; elipsoido didysis pusiaašis arba žemės spindulys pas pusiaują a = = 6377000 mtr., mažasis pusiaašis arba žemės spindulys pas polių b = 6357000 mtr., vadinasi a-b = = 21 kilometras. Todel einant iš ekvatoriaus į polius duotojo kūno svoris turi didėti jau iš tos priežasties, kad kūnas artėja prie žemės centro (Newton'o visuotinas traukos dėsnis

$$P = R \frac{m_1 \times m_2}{r^2});$$

ta pačia kryptim veikia ir aukščiau nagrinėtoji kūno inercijos išcentrinė jėga; tuo būdu einant iš ekvatoriaus į polius kūno svoris didėja daugiau, negu kai anksčiau buvo išvesta ir švytuokliš svyravimų sekimas parodė, kad suderinimui su tikrenybe tariamojo svorio jėgos greitėjimo platume α formula turi įgauti sekančio pavidalo:

$$g_\alpha = 9,780+0,052\sin^2\alpha = 9,806-0,026\cos 2\alpha.$$

Šita formula duoda:

dėl $\alpha = 0^\circ$, $g_0 = 9,780$ m/sek²

$\alpha = 45^\circ$, $g_{45} = 9,806$ m/sek²

$\alpha = 90^\circ$, $g_{90} = 9,832$ m/sek² (poliuose)

Kaunui turime $\alpha = 45^\circ 56'$, reiškia

$$g_{Kauno} = 9,815 \text{ m/sek}^2.$$

Vieno vandens literio svoris prie +4°C platume 45° imamas svorio vienetu kilogramu, šito kuno svoris

ekvatoriuje bus:

$$1 \times \frac{9,780}{9,806} = 0,997 \text{ kgr.},$$

poliuose:

$$1 \frac{9,832}{9,806} = 1,003 \text{ gr.}$$

Visos tos išvados ir formulos taikytinos tik jūros lygmėje. Kad radus svorio jėgos greitėjimą h metrų aukščiau jūros paviršiaus, reikia visas tas formulas padauginti iš:

$$\frac{r^2}{(r+h)^2} = \frac{r^2}{r^2+2rh+h^2} = \frac{1}{1+\frac{2h}{r}+(\frac{h}{r})^2} \cong \frac{1}{1+\frac{2h}{r}} \cong 1-\frac{2h}{r},$$

arba, imdami r = 6,370000 metrų, iš 1-0,0000032h. Tadą gausime su patenkinančiu tikslumu:

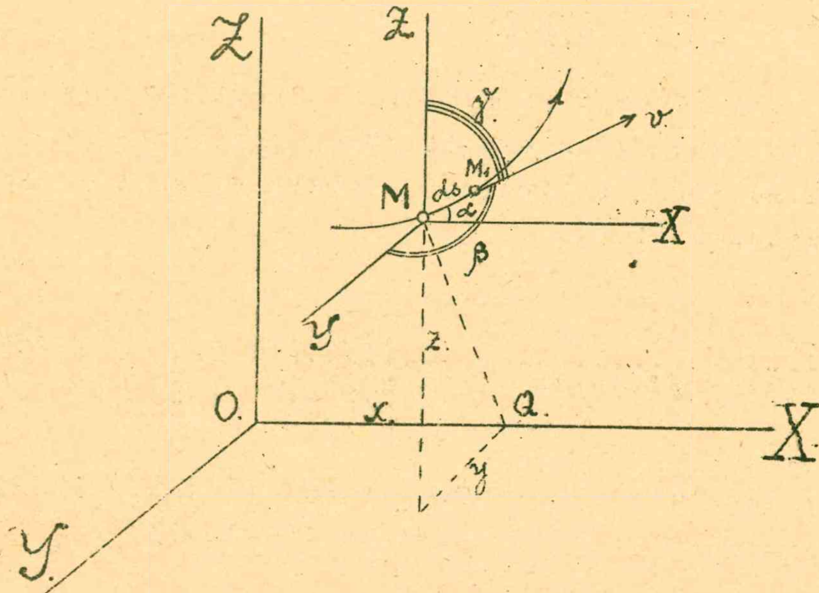
$$g_\alpha = 9,806-0,026.\cos 2\alpha-0,000003h \text{ mtr/sek}^2.$$

TAŠKO KREIVAEIGIS JUDĖJIMAS ERDVĖJE.

Jeigu taškas juda erdvės kreivaja, tai jo padėtis M kiekviename momente gali būti susekta jos koordinatomis x, y, z, stačiosios koordinatų sistėmos OX, OY, OZ (brėž. 77). Kaip traektorija, taip ir taško judėjimas jąja bus pilnai apspresti, jeigu žinomos funkcijos: $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$. Tikrai, pašalindami iš tų lygčių t, gauname dvejas lygtis, pavyzdžiui:

$$F_1(x\ y) = 0 \text{ ir } F_2(x\ z) = 0,$$

yra judėjimo traektorijos lygtys. Jeigu per laiko elementą dt, sekantį paskui momentą t, taškas išeina traektorija kelią $ds = \overline{MM_1}$, tai taško judėjimo greitumas momente t yra $v = \frac{ds}{dt}$ ir greitumo kryptis supuola su liečiamąja traektorijai taške M, nu-



brēž. 77

kreipta judėjimo link. Pavadinę liečiamosios kampus su koordinatų ašimis per α, β, γ, matome, kad dydžiai:

$$dx = ds.\cos\alpha;\quad dy = ds\cos\beta;\quad dz = ds\cos\gamma$$

yra kelio elemento ds projekcijos į koordinatų ašis. Bet projektuojanti tiesioji, pav. MQ yra statmena OX, o todel lygtys $x = f(t)$ vaizduoja taško M projekcijos į ašį OX judėjimo dėsnį. To judėjimo greitumas yra, sulig viršišdėstyto,

$$v_x = f'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\alpha = v\cos\alpha,$$

reiškia, taško M projekcijos į koordinatų ašį judėjimo greitumas lygus tikrojo taško M judėjimo greitumo projekcijai į tą pačią ašį.

Kadangi

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{v_y}{v},$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{v_z}{v}$$

ir be to dar:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

tai turime:

$$\left(\frac{v_x}{v}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{v}\right)^2 + \left(\frac{v_z}{v}\right)^2 = 1,$$

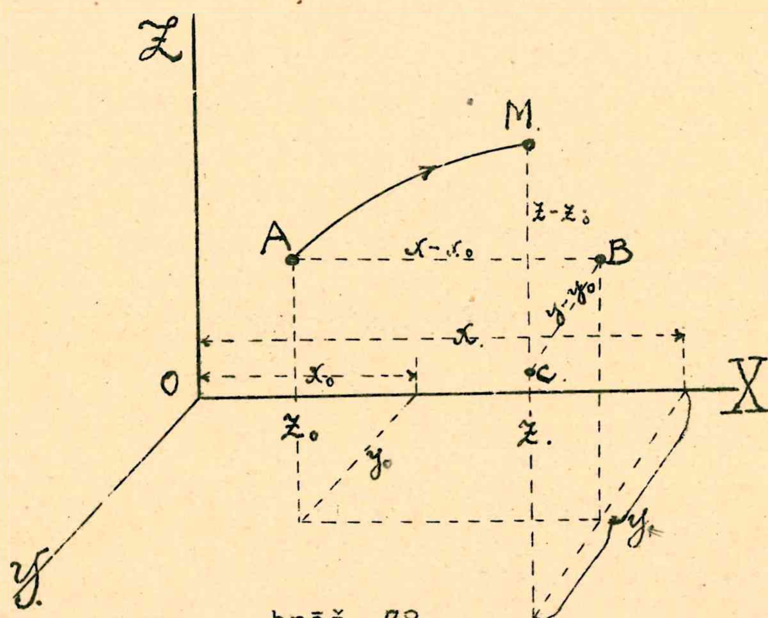
iš kur:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Tuo būdu taško M greitumas v didumu ir kryptimi yra paralelepipedo, pastatyto iš taško projekcijų į tris tarpusavio statmenas ašis judėjimų greitumų diagonalė, arba yra tų taško projekcijų judėjimų greitumų geometrinė suma.

Taško M judėjimą erdvės kreivąja AM (brėž. 78) galima įvykdyti tokiu būdu: stumti tašką iš padėties A, su koordinatomis x_0, y_0, z_0 ašies OX kryptimi iki taško B, tarpe $AB = x-x_0$ sulig dėsnio $x = f(t)$, tuo pačiu laiku vesti tiesiąją AB su tašku M lygiagrešiai jai pačiai ašies OY kryptimi tarpe $BC = y-y_0$ taip, kad tos tiesiosios AB kiekvienas taškas judėtų dėsniu $y = \varphi(t)$, ir, pagaliau,

visa plokšmę ABC kelti jai pačiai lygiagrečiai ašies OZ kryptimi tarpe CM = $z-z_0$ sulig dėsnio $z = \psi(t)$. Deliai tų trijų vienkartinių pastumėjimų ant AB, BC ir CM taškas M imamojo laikotarpio



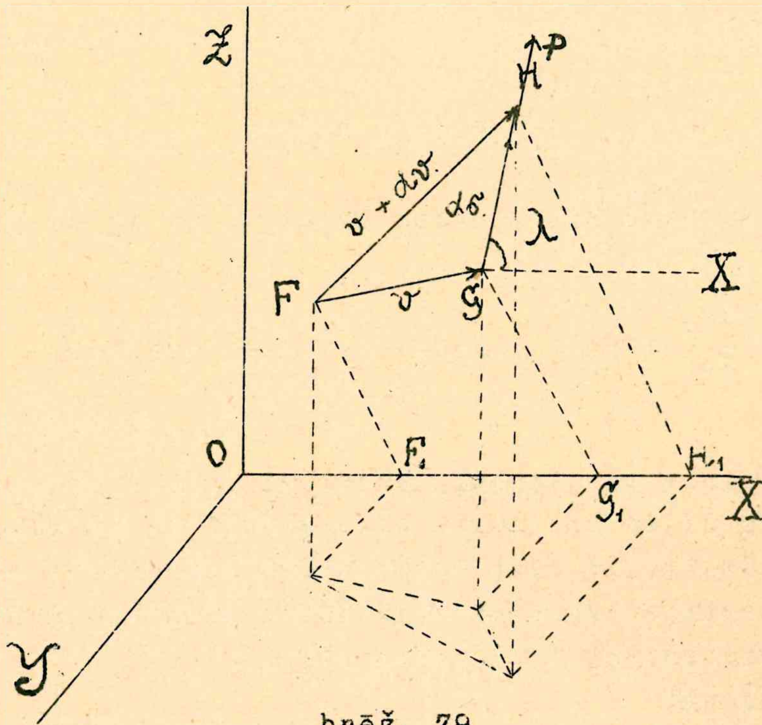
brėž. 78

gale paklius į savo tikrąją vietą M su koordinatomis x, y, z savo traektorijoje. Visa tai dera visoms taško M padėtims jo traektorijoje.

Trys parodytieji judėjimai vadinami taško tikrojo judėjimo AM sudedamieji išilgai koordinatų ašių. Tikrojo taško greitumo v projekcijos į koordinatų ašis yra drauge ir taško sudedamųjų judėjimų išilgai koordinatų ašių greitumai v_x, v_y, v_z.

Jeigu taškas juda erdvės traektorija ir momente t turi greitumą v, o momentu t+dt greitumą v+dv, skirtingą nuo v didumu ir kryptimi, tai atidėję iš bet kaip pasirinkto taško F (brėž. 79) dvi atkarpas FG ir FH atatinkamai lygias ir lygiagretes v ir v+dv ir sujungę taškus G ir H, gausim atkarpą

GH, vadinamą geometriniu greitumo v diferencialu; dydis gi $p = \frac{d\sigma}{dt}$, arba greitumo v geometrinė išvestinė yra taško judėjimo momente t greitėjimas, o šito greitėjimo kryptis sutampa su atkarpos $d\sigma$ kryptimi, skaitant nuo G į H. Projektuodami grei-



brėž. 79

tumų trikampį FGH į vieną iš koordinatų ašių, pav. į OX, matome, kad F_1G_1 yra greitumo v projekcija į OX, vadinasi, sulig viršpasakyto, sudedamojo judėjimo išilgai ašies OX momente t greitumas v_x, atkarpa gi F_1H_1 yra greitumo $v+dv$ projekcija į ašį OX, reiškia sudedamojo judėjimo greitumas v_x+dv_x momente $t+dt$. Todėl $G_1H_1 = dv_x$ yra elementarinis greitėjimas, arba sudedamojo judėjimo išilgai ašies OX greitumo v_x geometrinis diferencialas. Bet drauge su tuo G_1H_1 yra taško M kreivaeigio judėjimo elementarinio greitėjimo $GH = d\sigma$ projekcija, reiškia, pažymėję kampą, sudarytą $d\sigma$

su ašim OX per λ:

$$dv_x = d\sigma.\cos\lambda.$$

Padalę abi šitos lygybės dali iš dt ir pažymėję sudedamojo judėjimo išilgai ašies OX greitėjimą $\frac{dv_x}{dt}$ per p_x, gausim:

$$\frac{dv_x}{dt} = p_x = p\cos\lambda.$$

Tuo pat būdu kitom dviem kryptims OY ir OZ gausim:

$$\frac{dv_y}{dt} = p_y = p\cos\mu; \quad \frac{dv_z}{dt} = p_z = p\cos\nu,$$

kur μ ir ν yra kampai, sudaromi greitėjimo p su ašimis OY ir OZ. Tokiu būdu kiekvieno iš sudedamųjų judėjimų išilgai kurios nors koordinatų ašies greitėjimas lygus tikrojo taško judėjimo greitėjimo projekcijai į tą pačią ašį.

Kadangi

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu = 1,$$

tai pakėlę minėtas tris lygybes kvadratan ir sudėję, gausime:

$$p = +\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}.$$

Vadinasi, taško tikrojo judėjimo greitėjimas p savo didumu ir kryptimi lygus paralelepipedo, pastatyto iš sudedamųjų judėjimų išilgai koordinatų ašių greitėjimo, diagonalei, arba lygus tų greitėjimų geometrinei sumai.

Greitumų trikampis FGH (brėž. 79) guli plokštumoje, apibrėžtoje dviem sekančiomis viena paskui kitą liečiamomis taško judėjimo traektorijai, arba taip vadinamoj traektorijos kreivumo plokšmėj (oskuliacinėje plokšmėj) išvestoj per elementą ds, išeinamą per laiko elementą dt, sekantį paskui momentą t. Toje pačioje plokšmėje guli lankas $d\sigma$ ir greitėjimas $p = \frac{d\sigma}{dt}$. Išsklaidę elementarinį greitėjimą $d\sigma = p.dt$ dviem: traektorijai liečiamuoju $p_t dt$ ir jai normaliniu $p_n dt$, kaip tai buvo nurodyta (brėž. 42), ir eigdamiesi, kaip buvo aukščiau nurodyta, rasim, kad: traektorijai liečiamoji greitėjimo sudedamoji:

$$p_t = \frac{dv}{dt};$$

statmenoji traektorijai greitėjimo sudedamoji:

$$p_n = \frac{v^2}{\rho},$$

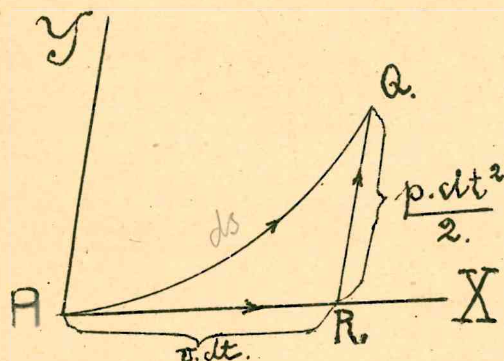
kame v - taško judėjimo greitėjimas momente t, ρ - traektorijos 1-jo kreivumo spindulys vietoje, užimamoje judančio taško momente t. Toliau:

$$p = +\sqrt{p_t^2 + p_n^2}.$$

Liečiamasis greitėjimas p_t išreiškia greitumo v didumo pakitimą, normalinis greitėjimas p_n - reiškia greitumo krypties pasikeitimą per sekundą. Normalinis greitėjimas p_n dažnai vadinamas įcentriniu, nes jis nukreiptas į traektorijos elemento kreivumo centrą, kurią ja juda taškas.

ATSILENKIMAS (DEVIACIJA).

Tegu taškas M aprašo kreivaeigę traektoriją, turėdamas pilną greitėjimą p, ir per laiko elementą dt, sekantį paskui momentą t, išeina kai kurį elementarinį lanką ds = AQ (brėž. 80). Jeigu momente t, kada taškas randasi A, greitėjimo p priežastis, t. y. jėga P, veikianti į tašką, išnyktų, tai taškas imtų judėti tiesia linija ir tolyginiu greitumu v, kurį jis turėtų momente t, ir per laiko elementą dt išeitų to greitumo kryptimi kelią AR = vdt; tikrenybėje gi taškas, veikiant į jį jėgai P ir turėdamas greitėjimą p, išeina lanką AQ = ds; iš čia seka, kad tų dviejų kelių geometrinis skirtumas arba atkarpa RQ taško išeinama tik deliai greitėjimo p ir supuola su pastarojo ir su jėgos P kryptimis; todel atkarpa RQ vadinama taško atsilenkimu nuo tiesiaeigio tolyginio judėjimo, arba jo deviacija duotajame laiko momente t.



brėž. 80

Išsklaidę taško tikrąjį elementarinį judėjimą AQ dviem sudedamaisiais judėjimais, vienu liečiamosios AX traektorijai taške A kryptimi, kitu kryptyje AY||RQ, matome, kad momente t sudedamasai greitumas v_x kryptyje AX yra v, kryptyje gi AY sudedamasis greitumas v_y = 0, nes tikrasis greitumas v guli kryptyje AX; sudedamasis greitėjimas p_x kryptyje AX yra nulis, sudedamasis greitėjimas p_y kryp-

timi AY yra p, nes tikrasis greitējimas p guli kryptyje AY. Todel sudedamieji judējimai bus: kryptimi AX - tolyginis su greitumu v, kryptimi AY - tolyginio greitējimo su greitējimu p ir pradžios greitumu nulis, reiškia, kelias RC, išeinamas per laiką dt pastaruoju judējimu, arba taško deviacija, išreiškiamas tokiu būdu; (analoginiai tolyginio greitējimo judējimo formulai:

$$s = \frac{pt^2}{2}):$$

deviacija

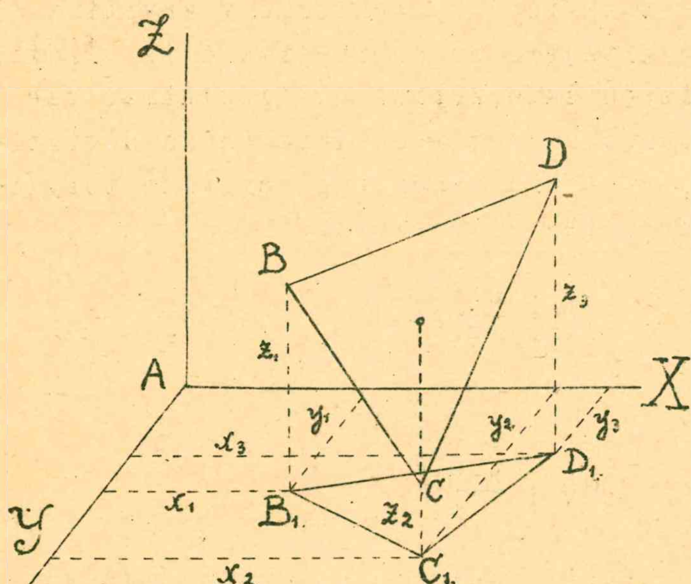
$$RQ = \frac{p.dt^2}{2}.$$

Deviacijos kryptis sutampa su taško tikrojo greitējimo duotame momente kryptimi.

GEOMETRINIO (KIETO) KŪNO JUDĒJIMAS.

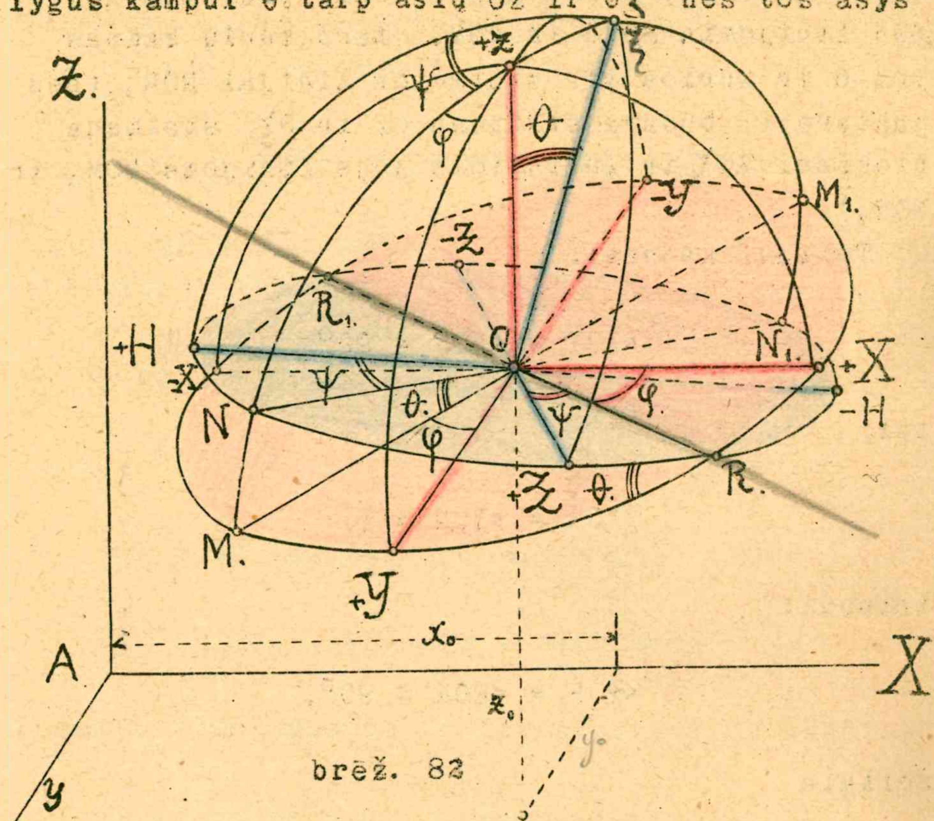
Kieto kūno padētis erdvēje suvokiama padētimi kokių nors trijų taškų B, C, D, pastoviai surištų su kūnu ir neesančių vienoje tiesiojoje. Tegu (brēž. 81) tokių kieto kūno trijų taškų (sudarančių trikampį BCD) stačiosios koordinatos būna: x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3. Pažiūrēsime, kiek reikia šitokių koordinatų, kad suvokti erdvēje padētį šio trikampio ir surišto su juo kieto kūno. Suradimui viršūnēs B padēties reikia žinoti tris josios koordinatas x_1, y_1, z_1; Žinodami taško B padētį, rasime antrosios viršūnēs C padētį tik dviejų josios koordinatų pagalba, pav. x_2 ir y_2, išvedę per tašką C_1, gulintį plokšmēje AXY ir turintį koordinatas x_2 ir y_2, vertikale OC_1 ir užkirsdami ją iš taško B žinomu mums ilgumu BC (duotojo trikampio BCD kraštinē). Turēdami to-

kiu būdu trikampio BCD dviejų taškų B ir C padėtį, matome, kad jo trečiosios viršūnės D padėties susekimui reikia žinoti tiktai vieną bet kurią to taško koordinatą, pav. z_3, išvesti gulsčią plokšmę nuotolyje z_3 nuo plokšmės AXY ir sukti trikampį apie ašį BC iki tam laikui, kol jo viršūnė D nesutiks tos gulsčiosios plokšmės; tada trikampio BCD ir surištojo su juo kūno padėtis bus pilnai suvokta. Iš to darome išvadą, kad kieto kūno padėtis erdvėje apibrėžiama šešių koordinatų. Tokia išvada liekasi galioje ir kiekvienai kitai koordinatų sistēmai, apibrėžiančiai kūno padėtį erdvėje. Antai, pav., kūno padėtis gali būti susekta stačiosios koordinatų sistēmos ašių Oξ, Oη, Oζ, einančių per kūno tašką O ir neatmainomai su juo surištų padėtim (brėž. 82). Susekimui šitos judomos koordinatų sistēmos padėties pamatinės, nejudamos AX, AY, AZ atžvilgiu, visų pirma, reikia žinoti judamosios sistēmos centro O koordinatas x_o, y_o, z_o. Kad suradus elementus, lemiančius ašių Oξ, Oη, Oζ kryptis ašių AX, AY, AZ atžvilgiu, išvedame per tašką O linijas OX||AX, OY||AY ir OZ||AZ, aprašome



brėž. 81

apie tašką O rutulį radiusu vienetu ir randame rutulio paviršiaus susikirtimo taškus X,Y,Z,Ƶ,H,ζ su visomis 6 koordinatų ašimis. Pažymėsime pagrindinių plokšmių XOY ir ξOη persikirtimo liniją ROR_1, o taipgi šitų plokšmių sudaromą kampą θ; jis bus lygus kampui θ tarp ašių OZ ir Oζ nes tos ašys



brėž. 82

atatinkamai statmenos plokšmėms XOY ir ξOη. Jeigu dabar pažymėsime kampą XOR per φ ir ξOR per ψ, tai kampai φ, ψ, θ pilnai nusprendžia judamosios koordinatų sistėmos padėtį nejudamos atžvilgiu, nes kampas φ apsibrėžia linijos OR padėtį pagrindinėje plokšmėje XOY, kampas θ - plokšmės ƵOH palinkimą į plokšme XOY, o drauge su tuo ašies Oζ kryptį ir, pagaliau, kampas ψ - apibrėžia ašies OƵ padėtį pagrindinėje plokšmėje ƵOH iš kur suvokiama ir padėtis ašies OH⊥OƵ. Tokiu būdu ir šiuo atvėju kieto kūno, ar surištos su juo judamos koordinatų ašių

sistēmos $O\xi$, OH, $O\zeta$ padētis apibrēžiama šešių elementų: x_0, y_0, z_0, φ, ψ ir θ, (taip vad. Eilerio koordinatų sistēma).

Kampų pareinamybēs išaiškinimui brēžinyje 82 pastebēsim, kad stačioji plokšmē, išvesta per ašis OZ ir $O\zeta$, kerta pagrindines plokšmes XOY ir ξOH linijomis MOM_1 ir NON_1, tarp kurių kampas yra θ ir kurios yra statmenos linijai ROR_1 (nes pastaroji, būdama statmena OZ ir $O\zeta$, statmena plokšmei $ZO\zeta$ ir gulinčioms joje linijoms MOM_1 ir NON_1).

Toliau, kadangi:

$$\sphericalangle XOY = \sphericalangle ROM = 90^\circ,$$

tai:

$$\sphericalangle XOR = \sphericalangle YOM = \varphi;$$

taipogi:

$$\sphericalangle \xi OH = \sphericalangle RON = 90^\circ,$$

reiškia

$$\sphericalangle \xi OR = \sphericalangle HON = \psi.$$

KAMPŲ TARP JUDAMŲ IR NEJUDAMŲ KOORDINATŲ AŠIŲ EILERIO KAMPAIS θ, φ, ψ IŠREIŠKIMAS.

Visi kampai tarp judamosios sistēmos $O\xi H\zeta$ ašių ir nejudamosios sistēmos $AXYZ$ ašių gali būti išreikšti Eilerio kampais, naudojantis brēžiniu 82 ir formula del sferinio trikampio, kurio kraštinēs yra a, b, c ir priešingieji joms kampai A, B, C,

kraštinės a kosinuso:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c . \cos A.$$

Antai, kampui $\alpha_1 = \zeta X$ randame iš sferinio trikampio $XR\zeta$, kurio kraštinės yra $a = \zeta X$, $b = XR = \varphi$, $c = R\zeta = \psi$ ir kampas $A = 180 - \theta$:

$$\cos\alpha_1 = \cos\zeta X = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi . \cos\theta.$$

Kampui $\zeta Y = \beta_1$, randame iš trikampio ζRY su kraštinėmis: $a = \zeta Y$, $b = \psi$, $c = 90^o - \varphi$ ir kampu $A = \theta$:

$$\cos\beta_1 = \cos\zeta Y = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta.$$

Kampui ζZ turime iš trikampio ζNZ, kame

$$NZ = 90^o - \theta, \ \zeta N = 90 - \psi. \ \ < \zeta NZ = 90^o;$$

$$\cos\gamma_1 = \cos\zeta Z = \sin\theta . \sin\psi.$$

Panašiu būdu gausime ir likusias 6-rias lygtis:

$$\cos\alpha_2 = \cos HX = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta$$
$$\cos\beta_2 = \cos HY = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta$$
$$\cos\gamma_2 = \cos HZ = \sin\theta\cos\psi$$

$$\cos\alpha_3 = \cos\zeta X = \sin\theta\sin\varphi$$
$$\cos\beta_3 = \cos\zeta Y = -\cos\varphi\sin\theta$$
$$\cos\gamma_3 = \cos\zeta Z = \cos\theta.$$

Kietojo kūno judėjimas bus žinomas, jeigu yra duoti kiekvienam laiko momentui x_o, y_o, z_o, θ, φ ir ψ didumai, reiškia, jeigu žinomos funkcijos:

$$x_0 = F_1(t);\ y_0 = F_2(t);\ z_0 = F_3(t);$$

$$\theta = f_1(t);\quad \varphi = f_2(t);\quad \psi = f_3(t).$$

Šitame atsitikime kūno kiekvieno taško $M(\xi, \eta, \zeta)$ absoliutinės koordinatos x, y, z taipogi gali būti išreikštos laiko funkcijomis. Tikrai, kadangi čia:

$$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z} = \bar{x}_0+\bar{y}_0+\bar{z}_0+\bar{\xi}+\bar{\eta}+\bar{\zeta},$$

tai projektuodami šita geometrine lygybe į nejudamas ašis $OXYZ$, nuosekliai rasime:

$$x = x_0+\xi\cos(\xi X)+\eta.\cos(HX)+\zeta\cos(\zeta X) = x_0+\xi\cos\alpha_1+$$

$$+\eta\cos\alpha_2+\zeta\cos\alpha_3$$

$$y = y_0+\xi\cos\beta_1+\eta\cos\beta_2+\zeta\cos\beta_3$$

$$z = z_0+\xi\cos\gamma_1+\eta\cos\gamma_2+\zeta\cos\gamma_3.$$

Kūno taško M koordinatos x, y, z gaunamos kaipo laiko funkcijos, jeigu į tuos reiškinius pastatyti kampų kosinusus, išreikštus Eilerio kampais θ, φ, ψ.

Pavyzdžiui, jeigu kietasis kūnas juda sraigto judėjimu apie ašį AZ, gi ašys AZ ir $O\zeta$ sutampa ir pradžios momente $t = 0$, $z_0 = 0$, tai turime:

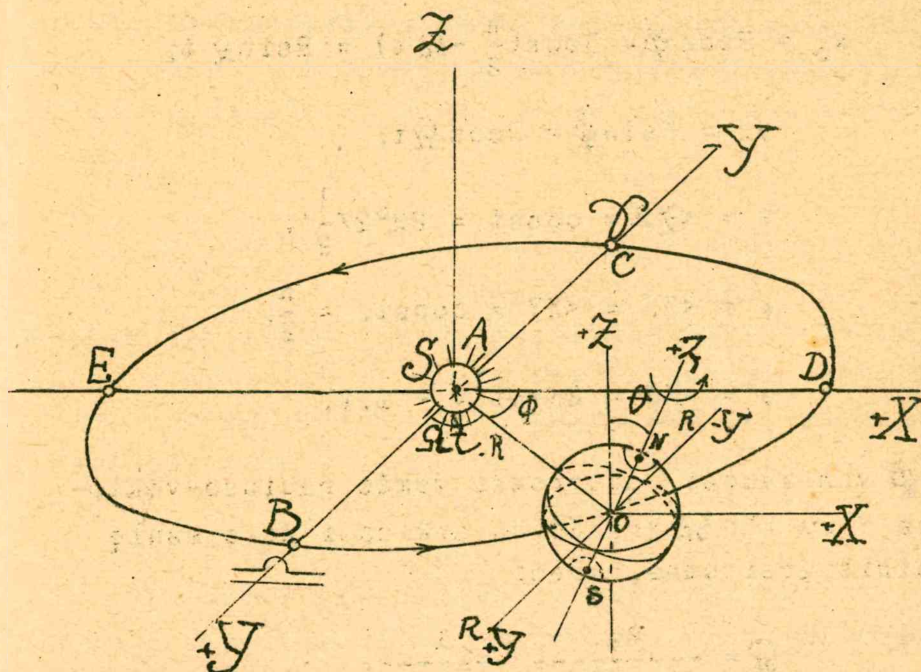
$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = c.t$$

$$\theta = 0,\ \varphi = \omega.t,\ \psi = 0$$

$$x = \xi\cos(\omega t) - \eta\sin(\omega t)$$

$$y = \xi\sin(\omega t) + \eta\cos(\omega t),\ z = c.t+\zeta.$$

Rasime dar reiškinius del kokio nors žemės rutulio taško M (ξ, η, ζ) absoliutinių koordinatų, prastumo deliai daleidę, kad ekliptika yra spindulio R apskritimas, kuriuo žemės centras juda tolyginiai, ir



brēž. 82[a]

kad žemės ašis turi erdvėje pastovią pakraipą, vadinasi, nekreipdami domės į precesiją ir nutaciją.

Paimsime (brėž.82[a]) saulės centrą S nejudamų koordinatų ašių pradžia A, ekliptikos plokšme paimsime plokšmę YOY, o mazgų linijas RR_1, t.y. ekvatorio plokšmės persikirtimo su ekliptika liniją nukreipsime išilgai ašies YOY. Žemės pastovią sukimosi ašį ♈+Oζ nukreipsime į šiaurės polių ir daleisime, kad judamoji koordinatų ašis Oξ sutampa su teigiamąja ašimi AY tuo momentu, kada žemė randasi taške B, vadinasi, rudens dienos ir nakties lygume (Rugsėjo mėn. 23 d.).

Kadangi stebėtojui, esančiam šiaurės pusrutu-

lyje, žemės sukimasis apie saulę ir apie savo ašį vyksta prieš laikrodžio rodyklę, tai, skaitydami laiką nuo rudens dienos ir nakties lygumo momento, turėsime sekančias pamatines lygtis:

$$x_o = R\cos\Phi = R\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Omega t\right) = R\sin\Omega t;$$

$$y_o = R\sin\Phi = R\cos\Omega t;$$

$$\theta = \angle \zeta Z = \text{const} = 23^o 27\frac{1}{2}';$$

$$\varphi = \angle XR = \angle XY = \text{const.} = \frac{\pi}{2};$$

$$\psi = \angle R\xi = 2\pi - \omega t = - \omega.t.$$

Čia Φ yra kampas, sudaromas žemės radiuso-vektoriaus R su AX; Ω yra žemės sukimosi apie saulę kampinis greitumas, arba:

$$\Omega = \frac{2\pi}{365,25\times 24}\ \frac{1}{\text{valanda}},$$

ω - žemės sukimosi apie savo ašį kampinis greitumas:

$$\omega = \frac{2\pi}{24}\ 1/\text{val.}$$

Šitais daviniais galima rasti kiekvieno žemės rutulio taško M su reliatyviomis koordinatomis (ξ, η, ζ) absoliutines koordinatas x, y, z, naudojantis aukščiau išvestomis formulomis.

Kada kūnas juda erdvėje, tai visi šeši elementai, apibrėžiantieji jo padėtį, gali keistis; čia, jeigu kūnas savo judėjime visai laisvas, tai kiekvieno iš tų šešių dydžių mainymasis nieku neapribotas ir nepareina vienas nuo kito; šituo at-

vėju sakoma, kad kūnas turi visus šešius palaidumo laipsnius. Jeigu kūnas savo judėjime nevisai laisvas, tai reiškia, kad kai kurie iš apibrėžiančių jo padėtį dydžių, pav. $x_0, y_0, z_0, \theta, \varphi, \psi$ yra varžomi; pavyzdžiui, jeigu kūnas sukasi apie nejudomą tašką, tai paėmę jį už pradžią O judamos koordinatų sistėmos, surištos su kūnu, mes turime daleisti:

$$x_0 = \text{const.};\ y_0 = \text{const.};\ z_0 = \text{const.},$$

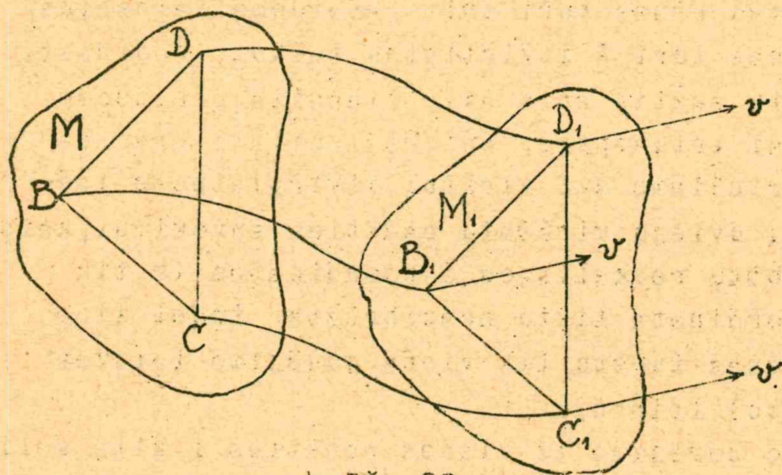
reiškia, kintamieji judėjimo elementai tėra trys, būtent: kampai θ, φ ir ψ yra nepriklausomi; tada sakoma, kad kūnas turi tris palaidumo laipsnius. Jeigu kūnas turi 2 įtvirtintus taškus, vadinasi, galėtų tik suktis apie ašį, einančią per tuodu tašku, tai trikampyje, apibrėžiančiame kūno padėtį ir turinčiame dvi viršūni įtvirtintuose taškuose, tų dviejų viršūnių padėties suvokimui, kaip matėme, būtų reikalingos 5 koordinatos ir tik viena koordinata liktų neapibrėžta; todel šiuo atvėju kūnas turėtų tik vieną judėjimo laisvės (palaidumo) laipsnį.

Į kūno perėjimą iš vienos padėties į kitą galima žiūrėti kaipo į eilę kūno mažų persislinkimų iš vienos padėties į kitą gretimą, labai artimą pirmajai; toks labai mažas kūno persislinkimas vadinamas elementariniu, kūno gi perėjimas iš vienos padėties į kitą su ribotu skirtumu koordinatose, vadinamas baigtiniu; kiekvienas baigtinis persislinkimas išskirstomas į begalinę eilę elementarinių; kiekvienas gi pastarųjų gali būti išsklaidytas, bendrai imant, dviem prasčiausiais elementariniais judėjimais: a) žengiamasis judėjimas (žengimas) išilgai kai kurios ašies ir b) sukimo judėjimas (sukimasis) apie tą pačią ašį. Jeigu baigti-

nis judėjimas susidaro tiktai iš elementarinių žengiamųjų, tai jis bus bendrai imant žengimo judėjimas (Schiebung, Translation), jeigu gi jis susidaro tiktai iš elementarinių sukimosi - tai bus bendrai sukimosi judėjimas (Drehung, Rotation).

KIETO KŪNO ŽENGIAMASIS JUDĖJIMAS.

Kūno judėjimas vadinasi žengiamuoju, jeigu kūno visi taškai aprašo vienodas ir tarpusavio lygiagretes traektorijas, taip kad kiekviena paimtoji kūne figura laike judėjimo liekasi pati sau lygiagretė. Pavyzdžiui, jeigu kūne M paimti trikampį BCD (brėž. 83), tai kūnui persislinkus į padėtį M_1,



brėž. 83

trikampis pereina į $B_1C_1D_1$, o kadangi traektorijos BB_1, CC_1 ir DD_1 lygios ir lygiagretės, tai gulinčios tarp jų atkarpos taipogi lygios ir lygiagretės:

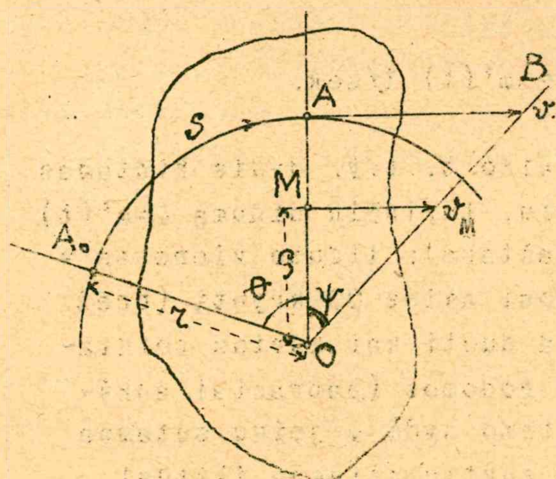
$$B_1C_1 \# BC; \; C_1D_1 \# CD; \text{ ir } B_1D_1 \# BD.$$

Šiam nuotikiui pakanka žinoti vieno kurio nors kūno taško judėjimą, kad žinoti viso kūno judėjimą, nes visi kūno taškai imtame momente turi ge-

ometriniai lygius greitumus v, liečiamuosius lygiagretėms traektorijoms ir geometriniai lygius greitėjimus p.

KIETO KŪNO SUKIMOSI JUDĖJIMAS.

Kieto kūno sukimosi judėjimas bus tada, jeigu kūno du kokie nors taškai randasi ramybėje. Daleidę, kad pagrindinio trikampio, apibrėžiančio kūno padėtį, dvi viršūni randasi kūno nejudamuose taškuose, mes matome, kad trikampio ir surišto su juo kūno galimas judėjimas yra sukimasis apie ašį, einančią per jo dvi nejudamas viršūnes. Tuo atvėju pagrindinio trikampio trečioji viršūnė ir bendrai kiekvienas kūno taškas, negulintis sukimosi ašyje, aprašo kūnui judant, apskritimą, statmeną sukimosi ašiai spindulio r, lygaus statmens, nuleisto iš duotojo taško į sukimosi ašį ilgumui. Plokšmė einančią per judančio kūno taško A (pagrindinio trikampio laisvą viršūnę) ir per sukimosi ašį O, vadinasi duotojo taško A meridianinė plokšmė. Išrinkę taško A apskritoje traektorijoje (brėž.84) kokį nors pastovų tašką A_0 ir išvedę per jį pradžios meridianą A_0O, nejudantį erdvėje, kūno judėjimą pilnai apibrėšime, jeigu kiekvienam laikui t žinosime apskritimo lanko ilgumą $A_0A = S$, kuriuo juda kūno taškas A, vadinasi, jeigu žinosime funkciją $S = f(t)$. Bet ka-



brėž. 84

dangi $s = r.\theta$, kur θ yra kampas A_0OA tarp taško A meridiano pradžios padėties ir jo padėties momente t, o dydis r = const. duotajam taškui, tai funkcijos $S = f(t)$ vietoje galima paimti funkcija

$$\theta = \frac{f(t)}{r} = \varphi(t),$$

kaipo pilnai nulemiančią taško A, o drauge su juo ir viso kūno judėjimą. Kampas θ vadinamas kūno pasisukimo kampu laike $t-t_0$, jeigu laike t_0 taškas A buvo pradžios meridiane. Taško A sukimosi greitumas laike t yra:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r.\theta)}{dt} = r.\frac{d\theta}{dt} = r.\omega,$$

kame
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

vadinasi kūno sukimosi kampiniu greitumu momente t. Kampinis greitumas

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \varphi'(t)\ 1/\text{sek}.$$

bendrai yra funkcija laiko t, t.y. dydis kintamas ir vaizduojamas vektoriu, turinčiu didumą $\omega = \varphi'(t)$ sutartinoje skalėje (maštabe): ilgumo vienetas = $= \frac{1}{\text{laiko vien.}}$ ir sukimosi ašies OO kryptį (brėž. 68); pastarajai sutaria duoti kai kurios teigiamos krypties, rodiklio rodomos (paprastai aukštyn), ir kampinio greitumo dydį ω jeigu sutampa su laikrodžio rodiklio sukimu atideda išilgai ašies nuo kokio nors pastovaus taško O teigiama kryptimi; atvirkščiai gi atkreiptas kampinis greitumas ω atidedamas priešinga kryptimi; pasisukimo kampus θ ir kampinius greitumus ω skaito teigiamais, jeigu žiūrėtojui stovinčiam išilgai

sukimosi ašies su kojomis taške O, galva rodiklio pusēn, rodysis, kad kūnas sukasi laikrodžio rodiklio kryptimi ir atbulai. Jeigu $\omega>0$, tai kūno pasisukimo kampas θ auga laikui bēgant, jeigu $\omega<0$, tai θ mažēja.

Duotas didumu ir kryptimi kampinis greitumas ω pilnai apsprendžia kūno sukimąsi duotame momente t, nes jo kiekvieno taško greitumas v lygus $r.\omega$, kame r yra taško nuotolis nuo sukimosi ašies ir yra nukreiptas taško meridianui statmenai kūno sukimosi pusēn. Iš formulos:

$$v = r.\omega$$

seka:

$$\omega = \frac{v}{r} = tg\psi$$

(brēž. 84). Todel, jeigu v ir r atidēti vienodoje linijinēje skalēje (maštabe) kokiam nors taškui A ir išvesti liniją OB, tai kampo AOB tangensas=$tg\psi$ reikš kūno sukimosi kampinį greitumą imtam momente; sukimosi greitumas v_M bet kokio taško M to paties meridiano AO, gulinčio nuo ašies O nuotolyje ρ gausis išvedus meridianui AO taške M statmenį iki persikirtimo su linija OB:

$$v_M = \rho tg\psi = \rho.\omega.$$

Tegu p yra besisukančio kūno taško A greitējimas (brēž. 85); išskaidę jį liečiamuoju greitējimu

$$p_t = p.\sin\mu$$

ir normaliniu (įcentriniu) greitējimu

$$p_n = p.\cos\mu$$

turēsim:

$$p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r.\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r.\varepsilon;\ \ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt};$$

dydis $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ vadinasi kūno kampiniu greitējimu momente t. Jis gaunamas, kaipo laiko funkcija iš lygčių pasisukimo kampui:

$$\theta = \varphi(t),\ \text{iš kur:}\ \omega = \frac{d\theta}{dt} = \varphi'(t)\ \text{ir}\ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \varphi''(t).$$

Kadangi $\varepsilon = \frac{p_t}{r}$, tai kampinio greitējimo matas bus:

$$\frac{\text{greitējimo matas}}{\text{spindulio matas}} = \frac{\text{ilgumo vienetas}}{(\text{laiko vienet.})^2 \times \text{ilgumo vien.}} =$$

$= \frac{1}{(\text{laiko vien.})^2}$, vadinasi $\frac{1}{\text{sek.}^2}$ arba $\frac{1}{\text{min.}^2}$ ar $\frac{1}{\text{val.}^2}$ ir t.t.

Kada $\varepsilon>0$, kampinis greitumas ω auga; jeigu $\varepsilon<0$, ω mažēja; todel kampinį greitējimą vaizduoja vektoriu, atidedamu išilgai sukimosi ašies teigiama kryptimi, jeigu $\varepsilon>0$ ir neigiama, jeigu $\varepsilon<0$.

Liečiamasis greitējimas

$$p_t = r.\varepsilon$$

sutampa su taš ko A greitumo v kryptimi, jeigu $\varepsilon>0$, ir nukreiptas priešingai v, jeigu $\varepsilon<0$.

brēž. 85

Taško A įcentriniam greitējimui turime:

$$p_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2.$$

Jis nukreiptas visumet į sukimosi ašį O.

Sudedami lygiagretainio taisykle abu greitėjimus p_t ir p_n, gauname taško A pilnąjį greitėjimą p:

$$p = \sqrt{p_t^2 + p_n^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Jis sudaro su taško A radiusu-vektoriu OA = r kampą α, susekamą iš sąlygos:

$$tg\alpha = \frac{p_t}{p_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Iš čia matoma, kad kampas α nepareina nuo r, vadinasi, visi kūno taškai, gulintieji vienoje meridianinėje plokšmėje, kaip antai: A,B,C (brėž.85) turi lygiagrečius greitėjimus, kurių didumai proporcingi taškų nuotoliams nuo sukimosi ašies.

a) Kada kūnas tolyginiai sukasi, pasisukimo kampas θ auga proporcingai laikui, reiškia $\theta = A.t$, kame A = const. = ω_0 ir reiškia kampą (radianais) meridiano aprašomą per laiko vienetą, pav. per sekundą. Kampas aprašytas per 1 minutę bus $60\omega_0$ ir jis sudaro

$$n = \frac{60.\omega_0}{2\pi} \quad \frac{rad}{rad}$$

apsisukimų į minutę. Šitą skaičių lengva nustatyti mėginimo keliu ir tokiu būdu galima gauti kūno sukimosi tolyginį kampinį greitumą:

$$\omega_0 = \frac{2\pi n}{60}.$$

Jeigu kampas ω_0 meridiano aprašomas per 1 sek.,

tai pilnas apskritimas, arba kampas 2π aprašomas per laiką

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ sek.},$$

reiškiantį kūno vieno apsisukimo laiką, arba periodą. Kampinis greitėjimas ε šituo atvėju yra nulis, todel kūno taško pilnas greitėjimas p sutampa su $p_n = r\omega_0^2$, o $\alpha = 0^\circ$.

b) Tolyginio greitėjimo sukimasis apibrėžiamas sąlyga:

$$\varepsilon = \text{const.} = \varepsilon_0;$$

iš kur seka, kadangi $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$; $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon_0$; $\int d\omega = \int \varepsilon_0 dt$; $\omega = \varepsilon_0 t + \omega_0$, kur ω_0 yra kampinis greitumas momente $t = 0$. Toliau, kadangi $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, tai:

$$\int d\theta = \omega . dt = \int (\varepsilon_0 t + \omega_0) dt;$$

iš čia integruodami gauname pasisukimo kampo reikšmę:

$$\theta = \varepsilon_0 \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \theta_0,$$

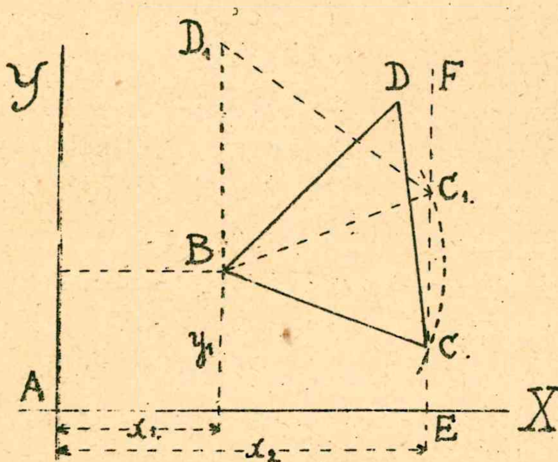
kame θ_0 yra meridiano pasisukimo kampas laike $t = 0$, skaitant nuo kai kurio pradžios meridiano.

Tolyginio greitėjimo sukimosi sukasi, pav. sunkusis cilinderis, laisvai besisukantis ant horizontalinės ašies, jeigu apie cilinderį apvynioti siūlą ir prie jo galo pririšti svorį, kurio leidimasis bus tolyginio greitėjimo vertikalinis judėjimas (su greitėjimu mažesniu, negu g); o cilinderio sukimasis - tolyginio greitėjimo sukimasis; be to, ε bus tuo mažesnis, juo cilinderio

masē bus didesnē pakabintojo ant siūlo svorio masēs atžvilgiu, kaip tai pamatysime dinamikoje.

KIETO KŪNO PLOKŠČIAS JUDĒJIMAS; PLOKŠČIOS FIGŪROS JUDĒJIMAS JOS PLOKŠMĒJE.

Jeigu kietojo kūno trijų taškų, negulinčių vienoje tiesiojoje, traektorijos lygiagretēs vienai plokšmei, tai visi kūno taškai juda lygiagrečiai tai pačiai plokšmei, ir kiekvienas kūno kirtimas lygiagrečiai šitai plokšmei, juda savo plokšmēje. Toks kūno judējimas vadinasi plokščiu judējimu; jo suvokimui pakanka žinoti kokio nors kūno plokščio piuvio judējimą jo plokšmēje. Kiekvienos plokščios figūros padētis jos plokšmēje susekama jos kokių nors dviejų taškų B ir C padētim. Pavyzdžiui, susekimui trikampio BCD padēties (brēž. 86) koordinatų ašių sistēmos XAY atžvilgiu reikia žinoti visų pirma vienos viršūnēs vieną, pav. B, kuriam tam tikslui reikia turēti dvi josios koordinatas x_1 ir y_1; antrosios viršūnēs C padēties suradimui reikia žinoti jau nebe dvi koordinatas, o tiktai



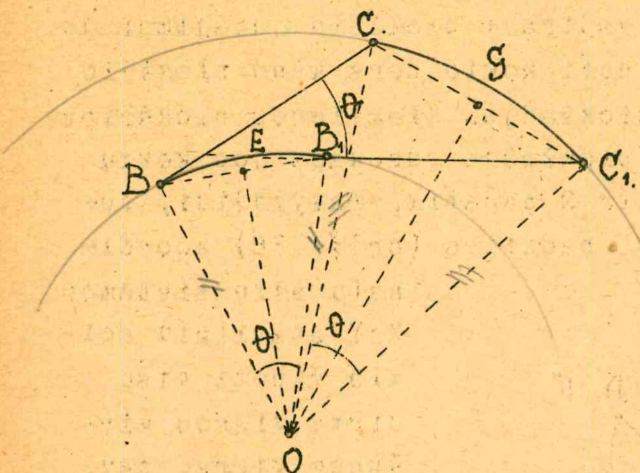
brēž. 86

vieną, pav. x_2, nes žinomas nuotolis BC pavaduoja antrąją koordinatą. Išvedę liniją EF||AY nuo ašies AY nuotolyje AE = x_2 ir užkirtę ją iš taško B ilgumu BC, gausim bendrai imant du taškus C ir C_1, rodančius kraštinēs BC, o drauge su ja ir viso

trikampio BCD padėtį; iš uždavinio sąlygos bus matoma, kokią iš dviejų trikampio padėčių reikia paimti. Tokiu būdu plokščios figuros padėtis, bendram atvėjuje, suvokiama trimis koordinatomis.

Tegu BC (brėž. 87) yra atkarpa, apibrėžiančioji plokščios figuros padėtį, o B_1C_1 - tos pačios atkarpos toje pat plokšmėje antroji padėtis.

Lengva parodyti, kad atkarpos perkelimas iš padėties BC į padėtį B_1C_1 gali būti atliktas sukimu apie kai kurį tašką O, gulintį toje pat plokšmėje (Chasleso teorema).

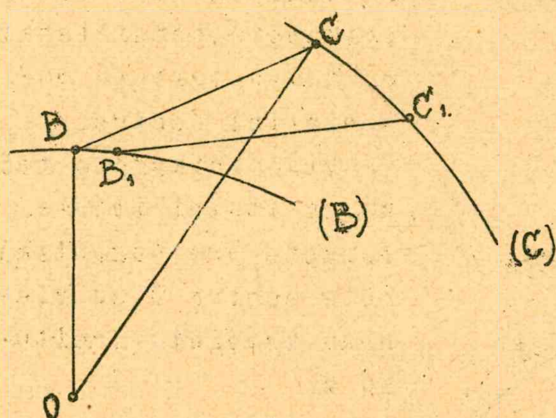


brėž. 87

Išvesime tiesiasias BB_1 ir CC_1, pastatysime viduryje tų linijų statmenis EO ir SO ir jų persikirtimo tašką O sujungsime su B, B_1, C ir C_1. Kadangi $OB = OB_1$ ir $OC = OC_1$, tai trikampiai OBC ir OB_1C_1, kaipo turintieji po tris atatinkamai lygias kraštines ir bendrąją viršūnę O, lygūs tarpusavio, vadinasi sukdami trikampį OBC apie tašką O galime atvesti jį padėtin OB_1C_1, reiškia atkarpą BC atvesti į B_1C_1. Prie to taškas B aprašys apskritimo lanką BB_1 apie tašką O, vadinamą persislinkimo centru, taškas C - apskritimo lanką CC_1 apie tą patį centrą, o visos trys trikampio OBC kraštinės pasisuks vienu ir tuo pačiu kampu

$$\theta = \angle BOB_1 = \angle COC_1 = (BC,\ B_1C_1).$$

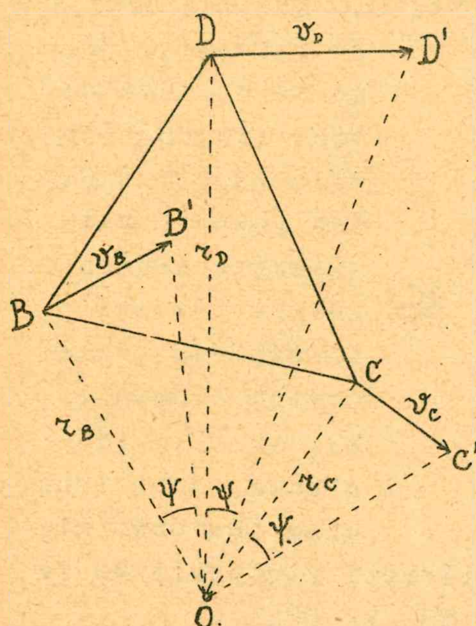
Jeigu duota padētis atkarpos BC (brēž. 88) ir taškų B ir C traektorijos, kurias pažymēsime per (B) ir (C), tai paēmę netoli B ant traektorijos (B) tašką B_1 ir užkirtę iš jo ilgumu BC traektoriją (C), pastaroje rasime tašką C_1, gulintį arti C ir duodantį, drauge su B_1, tos pačios atkarpos gretimą padētį B_1C_1. Kad gavus persislenkimo centrą O, reikia išvesti normalines traektorijų elementų BB_1 ir CC_1 viduriuose, arba trumpiau (kadangi šitie elementai labai maži) išvesti statmenis BO ir CO traektorijos elementams BB_1 ir CC_1.



brēž. 88

Apskritimų lankai BB_1 ir CC_1, kuriais juda besisukdami apie O taškai B ir C kad perējus į B_1 ir C_1 labai artimi tikrosios traektorijos elementams BB_1 ir CC_1. Jeigu elementai BB_1 ir CC_1 yra be galo maži, o tuo pačiu BC ir B_1C_1 yra dvi be galo artimos judančios atkarpos padētys, tai tokį tiesiosios BC be galo mažą persislinkimą galima skaityti pilnai supuolančiu su josios sukimosi apie tašką O, kurį šiuo atvēju vadinama judančios tiesiosios jos padētyje BC momentaliniu centru, arba poliu. Tokiu būdu į plokščiosios figuros judējimą jos plokšmēje galima žiūrēti kiekvienu momentu, kaipo į sukimąsi apie jos plokšmēje gulintį tašką O, vadinamą momentaliu centru, arba poliu. Pastarojo padētis susekama dviejų figuros nustatytų taškų vienlaikiniu persislinkimu, arba greitumų

kryptimis. Tegu paprasčiausiai figurai - trikampiui BCD (brēž. 89) duota kai kuriam momentui dviejų jo viršūnių B ir C persislinkimų arba greitumų kryptis. Išvedę toms kryptims taškuose B ir C statmenis, jų persikirtimo taške O rasime trikampio persislenkimo duotu momentu momentalinį centrą.



brēž. 89

Visų trikampio taškų greitumai imtame momente yra sukantieji apie centrą O su vienodu kampiniu greitumu ω.

Todel, jeigu bus dar duotas vieno kurio nors taško, pav. B, greitumo didumas, būtent v_B, tai tosios figuros visų kitų taškų, arba plokščios sistēmos taškų, neatmainomai surištų su linija BC greitumai surandami labai paprastai. Pavadinę nuotolį BO arba taško B momentalinį spindulį per r_B, turime:

$$v_B = r_B \cdot \omega,$$

iš kur:

$$\omega = \frac{v_B}{r_B}.$$

Žinodami ω, randame tosios figuros kitų taškų sukančius greitumus, pav. taško C:

$$v_C = r_C \cdot \omega,$$

taško D:

$$v_D = r_D . \omega \text{ ir t.t.}$$

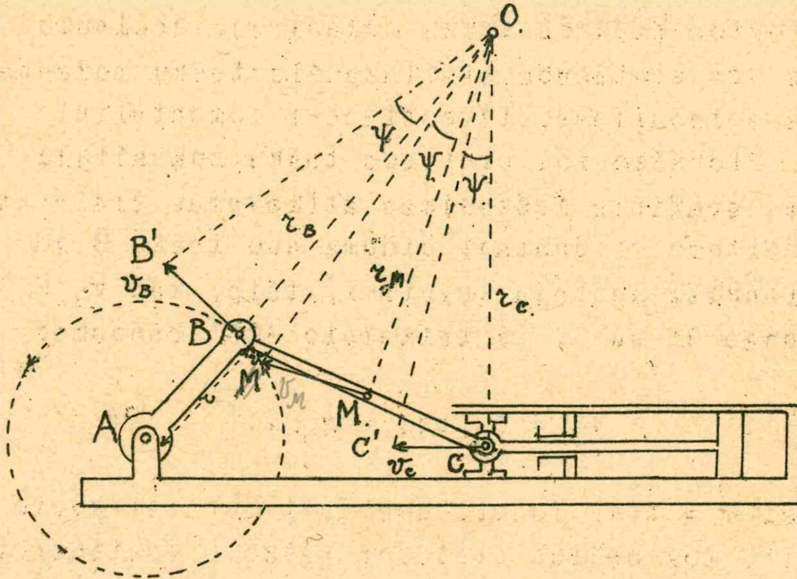
Plokščiosios figuros taškų sukančiųjų greitumų kryptys yra statmenos atatinkančių taškų momentaliniams spinduliams, išvestiems į momentalinį centrą. Plokščiosios sistėmos taškų sukančiųjų greitumų grafinis ieškojimas atliekamas šiaip: atidėję greitumo v_B duotąjį didumą nuo taško B jo persislenkimo duotąja kryptimi, taip, kad v_B = BB' ir sujungę B' su O, iš trikampio BOB' randame:

$$v_B = r_B . tg\psi = r_B . \omega,$$

vadinasi $\omega = tg\psi$. Todel, norėdami surasti kurio nors kito tos pačios sistėmos taško D greitumą v_D, išvedame to taško momentalinį spindulį r_D = DO ir atidedame nuo jo prie viršūnės O kampą ψ; gautoji tuo būdu linija OD' atkirs normalės DD', išvestos iš D į momentalinį spindulį OD, atkarpą DD', kuri toje pačioje skalėje, kurioje buvo paimta v_B, duos taško D greitumą v_D.

Pavyzdžiui, gulsčiosios garo mašinos mechanizme (brėž. 90) sujungtas su stumekliu šliaužikas C judina skriejiką BC, kuris savo eile suka alkūnę AB. Skriejiko taškas C taip vadinamųjų paralelių vedamas juda horizontaliai; skriejiko taškas B juda apskritimu, aprašomu alkūnės galūne, greitumu v_B = $= r . \omega$, kame r = AB = alkūnės spinduliui, $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ - pastarojo sukimosi kampinis greitumas, n - jo apsisukimų per minutę skaičius (alkūnės judėjimas manomas tolyginis). Skriejiko judėjimo momentalinis centras O randamas normalių BO ir CO, išvestų taškuose B ir C į tų taškų greitumų kryptis sukir-

time. Atidėję BB' = v_B, sujungiame B' su O; kampą BOB' = ψ atidedame nuo OC, gauname kryptį OC', kurios susikirtimas su gulsčiąja linija CC' duoda



brėž. 90

atkarpą CC' = v_C = $r_C \cdot \omega$ = $r tg\psi$ = šliaužiko ir skriejiko taško C bendram greitumui. Bet kurio skriejiko taško M greitumas randamas tuo pačiu būdu ($v_M \perp MO$) jo didumas yra:

$$v_M = r_M \cdot \omega = r_M \cdot tg\psi .$$

Tegu tiesioji BC ilgumo l (brėž. 91) juda taip, kad taškas B slenka išilgai tiesiosios AX, taškas C - išilgai tiesiosios AY, tarp kurių nuolatinis kampas yra α.

Momentalinis centras Q randamas normalių BO ir CO išvestų taškuose B ir C tų taškų to paties laiko greitumams sukirtime. Per taškus A, B, O ir C galima išvesti apskritimą, kurio diametras yra AO, nes kampai ACO ir ABO - statieji. Išvedę to ap-

skritimo kitą diametrą CD, matome, kad $<CDB = <CAB = \alpha$, o $<CBD$ - status; todel iš trikampio CBD turime:

$$l = CD\sin\alpha, \text{ arba } CD = AO = \frac{l}{\sin\alpha} = \text{const.}$$

Tokiu būdu, momentalinio centro O nuotolis AO nuo taško A, kiekvienoje judančios tiesiosios BC padėtyje, yra dydis pastovus, lygus $l/\sin\alpha$; vadinasi, tiesiosios BC plokšmėje XAY judėjimo momentalinių centrų geometrinė vieta, arba taip vadinamoji nejudoma centroida (ar nejudoma poloida) yra spindulio $AO = \frac{l}{\sin\alpha}$ apskritimas.

brēž. 91

brēž. 92

Kas gi liečia įvairių tiesiosios BC taškų, jai judant, aprašomų traektorijų ieškojimą, tai šito klausimo palengvinimui, daleisime, kad $\alpha = 90^0$ (brēž. 92) ir analizi-

niu keliu rasime kokio nors taško T, gulinčio tiesiosios BC nuotolyje CT = a iš vieno galo ir iš kito nuotolyje BT = b (a+b = 1) traektorijos lygtis. Kintamą kampą ABC, sudaromą tiesiosios BC su ašimi AX pavadinę θ, turēsime taško T koordinatas:

$$x = a.\cos\theta, \text{ arba: } \frac{x}{a} = \cos\theta \text{ ir } y = b\sin\theta \text{ arba: }$$

$$\frac{y}{b} = \sin\theta.$$

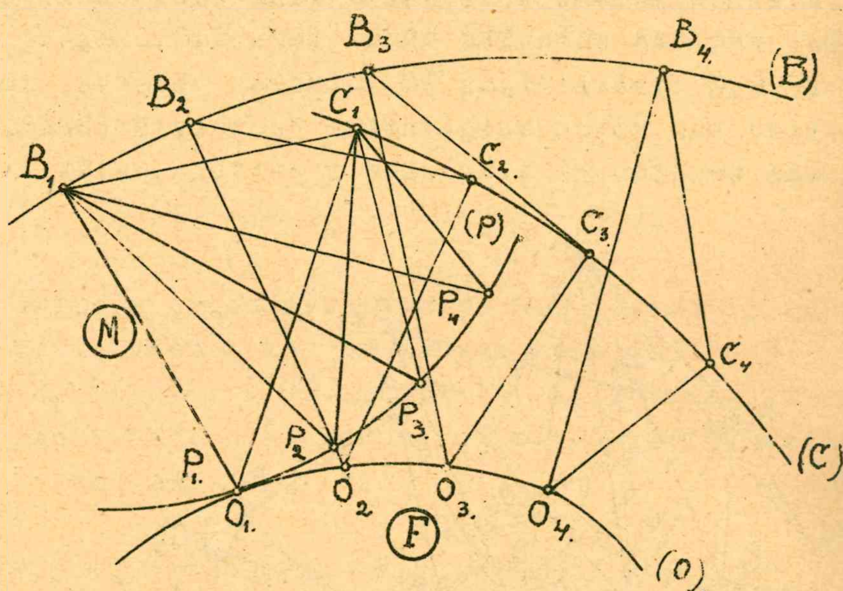
Pakēlę tas lygtis kvadratu ir paskui sudēję rasime taško T traektorijos lygtis:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Kaip matome, traektorija yra elipsas su pusašiais a ir b, nukreiptais išilgai koordinatų ašių AX ir AY. Tą pačią išvadą gausime, paēmę tašką T linijos BC tesinyje. Tuo principu yra pamatuotas prietaisas elipsams braižyti (t.v. elipsografas). Lengva parodyti, kad kiekvienam kampo α didumui tarp ašių AX ir AY (brēž. 91) kiekvienas taškas pastoviai surištas su linija BC, taipogi aprašo elipsą, kurio centras randasi taške A, bet ašys bendrai sakant nesutampa su AX ir AY. Kadangi slenkančio savo traektorija taško T greitumo kryptis sutampa su liečiamąja traektorijai, o taško greitumas statmenas taško momentaliniam spinduliui, tai kad išbrēžus liečiamąją traektorijai, reikia per tašką T išvesti statmenį NN aprašančio traektoriją taško momentaliniam radiusui TO.

PLOKŠČIOSIOS FIGUROS JOS PLOKŠMĖJE BAIGTINIS PERSISLENKIMAS.POLOIDŲ (CENTROIDŲ) RITINIMAS.

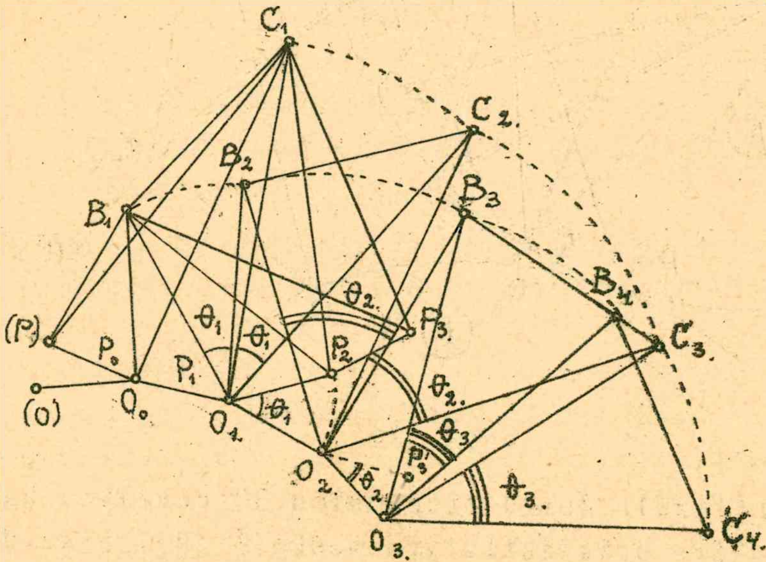
Tegu B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_4C_4 (brėž. 93) yra įvairios judamos tiesiosios BC ir surištos su ja figuros, ar visos plokščios taškų sistėmos, vadinamos judama plokšme ir žymimos Ⓜ (mobile) padėtys kai kurioje pagrindinėje nejudamoje plokšmėje, vadina-



brėž. 93

moje Ⓕ (fixe). Jeigu tiesiosios BC perėjimo per tas padėtis priežastis yra taško B judėjimas duotąja traektorija (B) ir taško C - duotąja traektorija (C), tai kiekvienai tiesiosios BC padėčiai atatinka tam tikras momentalinis centras, arba polius O, kurio padėtis nejudamoje plokšmėje Ⓕ surandama dviejų normalių, išvestų traektorijoms (B) ir (C) atatinkamuose taškuose B ir C susikirtimo

taške. Polių O visuma, arba geometrinė vieta nejudamoje plokšmėje F sudaro nejudomą poloidą (arba centroidą), kurią žymėsim (O). Kiekvienoje linijos BC padėtyje su poliu O sutampa judamos plokšmės Ⓜ kai kuris taškas P, imtame momente turės greitumą nulis ir apie kurį kalbamame momente įvyksta plokšmės Ⓜ sukimasis. Tokių taškų P judamoje plokšmėje Ⓜ visuma sudaro judamąją poloidą (arba centroidą) žymimą (P). Kiekviename momente abi poloidos, judamoji (P) ir nejudamoji (O) liečia viena kitą momentalinio centro sutampančiose padėtyse O ir P ir tiesiajai BC judant, ritinasi viena kitą be slydimo. Tai įrodoma sekančiu būdu. Tegu B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 ir B_4C_4 yra linijos BC keturios padėtys, imtos viena nuo kitos baigtiniame nuotolyje (brėž. 94). Kad perėjus iš pirmosios į antrąją padėtį



brėž. 94

$\Delta\ O_1B_1C_1$ pasisuka apie centrą O_1 kampu θ_1 ir pereina į padėtį $O_1B_2C_2$. To perėjimo laike greitumą nulis turi judamos plokšmės taškas P_1, sutampantis su O_1. Pereinant iš antrosios padėties B_2C_2 į tre-

čią B_3C_3 persislenkimo centru yra nejudomos plokšmės kitas taškas O_2, apie kurį kampu θ_2 pasisuka $\Delta\, O_2B_2C_2$, pereidamas į padėtį $O_2B_3C_3$; jam besisukant su tašku O_2 sutampa toks judamosios plokšmės taškas P_2, kuris iki pirmojo pasisukimo kampu θ_1 užimdavo tokią vietą, kuri jam duodavo galimybės po pirmojo pasisukimo sutapti su O_2; iš čia seka, kad $O_1O_2 = P_1P_2$ ir kad kampas $P_2O_1O_2 = \theta_1$. Jeigu perėjimas iš padėties B_3C_3 į B_4C_4 įvyksta besisukant tiesiajai BC apie momentalinį centrą O_3 kampu θ_3, tai su tašku O_3 trečiojo pasisukimo laiku sutampa toks judamosios plokšmės taškas P_3, kuris antrojo pasisukimo kampu θ_2 laike perėjo į O_3, vadinasi, iki tam pasisukimui jis užimdavo judamoje plokšmėje vietą P'_3, surandamą iš sąlygų:

$$O_2P'_3 = O_2O_3 \text{ ir } \angle P'_3O_2O_3 = \theta_2.$$

Iki pirmajam pasisukimui kampu θ_1, taškas P_3 užimdavo tokią vietą, kad pasisukus apie centrą O_1 kampu θ_1 pereiti į P'_3, reiškia, iki tiesiosios BC judėjimo pradžios taškas P_3 užimdavo vietą, surandamą iš sąlygų:

$$\angle P_1P_2P_3 = \angle O_1O_2P'_3; \quad P_2P_3 = O_2P'_3 = O_2O_3$$

iš čia taipogi seka, kad:

$$\angle(P_2P_3, O_2P'_3) = \theta_1, \text{ iš čia: } \angle(P_2P_3, O_2O_3) =$$

$$= \theta_1 + \theta_2.$$

Taškų P_1, P_2, P_3 padėtis judamoje plokšmėje Ⓜ prieš tiesiosios BC judėjimo pradžią galima taipogi surasti ir iš jų nuotolių nuo taškų B ir C tų taškų

atatinkamose padētyse, kuriam tai tikslui reikia ant kraštinės B_1C_1, kaipo ant pagrindo, pastatyti trikampius: $B_1C_1O_1$ (viršūnėje O_1 randasi taškas P_1), paskui:

$$\triangle B_2C_2O_2 = \triangle B_1C_1P_2 \text{ ir } \triangle B_3C_3O_3 = \triangle B_1C_1P_3.$$

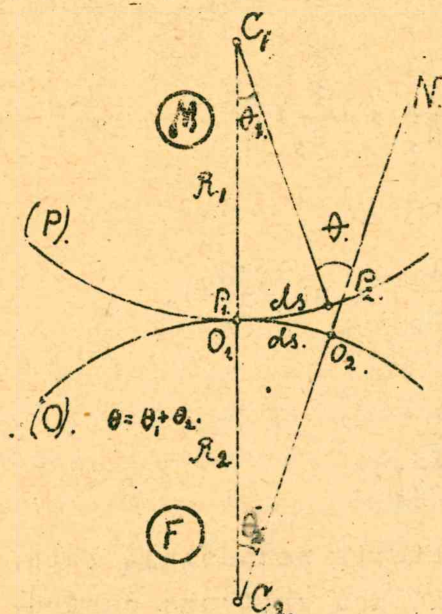
Tuo būdu matome, kad tiesiosios BC perėjimą per nuosekliias padėtis B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_4C_4... galima įvykdyti ritinant judamą laužtinę liniją $P_1P_2P_3$... neatmainomai surištą su tiesiąja BC (brėž. 94 ji parodyta savo pradžios padėtyje) apie nejudomą laužtinę liniją $O_1O_2O_3$..., kuri susidaro iš elementų, atatinkamai lygių pirmosios elementams; abi laužtinės linijos turi bendrą viršūnę, reiškiančią tiesiosios BC persisienkimo centrą duotame momente. Daleidę, kad nuosekliosios padėtys, per kurias eina linija BC, paimtos be galo arti viena nuo kitos, gausime vietoje dviejų laužtinių linijų, sudaromų persisienkimų centrais - dvi ištisines kreivas poloidas, nejudomą (O) ir judamą (P), besiritinančias viena kita be slydimo ir susiliečiančias taške, kuris yra judamos plokšmės judėjimo poliu duotajam momentui. Vadinasi, kiekvienas plokščiosios figuros arba sistėmos Ⓜ judėjimas jos plokšmėje yra tolygus nepakeičiamai surištos su sistėma Ⓜ judamos poloidos (P) ritinimui apie nejudomą poloidą (O) surištą su nejudama plokšme Ⓕ

Atatinkamai tam, kietojo kūno plokščias judėjimas gali būti manomas, kaipo sujungto su kūnu cilindrinio paviršiaus ((P)) ritinimasis apie nejudamą cilindrinį paviršių ((O)); tų dviejų cilindrinių paviršių vedamosios yra aukščiau nagrinėtosios poloidos (P) ir (O); jųjų sudaromosios yra statmenos plokšmėms, kuriose juda kietojo kūno taš-

kai.

PLOKŠČIOS SISTĒMOS JUDĒJIMO KAMPINIS GREITUMAS.

Plokščiai figurai (M) judant jos plokšmėje (F) momentalinis centras, arba judamos ir nejudamos centroidų susilietimo taškas juda abiem centroidom vienodu greitumu u, o judamoji sistēma M sukasi apie momentalinį centrą kai kuriuo kampiniu greitumu ω.



brėž. 94[a]

Rasime sąryšį tarp greitumų ω ir u. Tegu momente t (brėž. 94[a]) centroidos (P) ir (O) liečiasi taške $P_1 = O_1$, o momente t+dt jų lietimosi taškas pereina į O_2, padarės abiem kreivosiomis vieną tą patį kelią

$$O_1O_2 = P_1P_2 = ds = udt,$$

Momente t bendroji normalē centroidoms, einanti per momentalinį centrą $P_1 = O_1$ ir abiejų kreivųjų kreivumo centrus yra C_1C_2, momente t+dt bendroji normalē bus C_2N ir momentalinis centras O_2, o linija C_1P_2 sutaps su C_2N, pasukta kampu

$$\theta = C_1P_2N.$$

Bet iš trikampio $C_1C_2P_2$ arba $C_1C_2O_2$ (taškai O_2 ir P_2 yra be galo artimi, nes P_2O_2 - begalinē mažybē 2-sios eilēs) mes matome, kad:

$$\theta = \theta_1+\theta_2,$$

arba:

$$\theta = \frac{ds}{R_1} + \frac{ds}{R_2} = udt\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

kame R_1 ir R_2 yra judamos ir nejudamos centroidų kreivumo spinduliai. Pastebėję, kad θ yra sistēmos M pasisukimo kampas per laiką dt, vadinasi yra lygus ωdt, randame:

$$\omega dt = udt\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

vadinasi

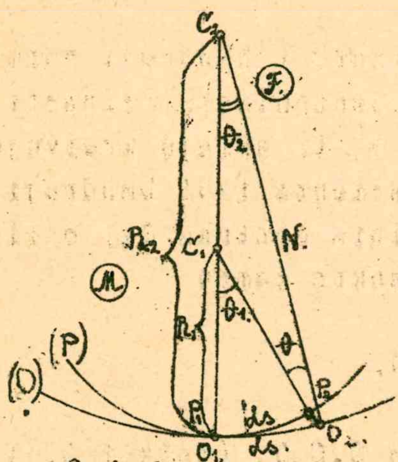
$$\omega = u\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = u\left(\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}\right),$$

arba:

$$u = \omega \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}.$$

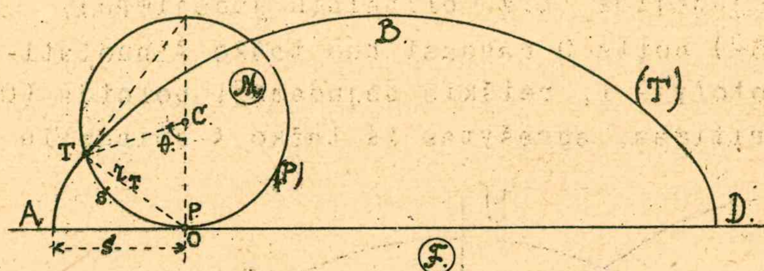
Jeigu judamoji centroida liečia nejudamąją taip, kad abu kreivumo centru guli iš vienos bendrosios liečiamosios pusēs, tai vienas iš kreivumo spindulių R_1 arba R_2 daromas neigiamu; taip antai, brēžinyje 94[b] spindulis R_2 skaitomas neigiamu arba: $\theta = \theta_1-\theta_2$, iš kur gauname:

$$\omega = u\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)=u\left(\frac{R_2-R_1}{R_1 R_2}\right).$$



brēž. 94[b]

Pavyzdžiai: 1) Taip vadinamajame plokščiosios sistēmos Ⓜ (brēž. 95) cikloidaliniame judējime nejudoma poloida (O) yra tiesioji, judamąja ritantis apskritimas (P); jų lietimosi taškas O yra



brēž. 95

sistēmos M judējimo momentalinis centras. Apskritimo (P) taškais T aprašomosios traektorijos (T) yra cikloidos, pav. ATBD. Linija OT = r_T yra taško T momentalinis spindulys, reiškia, normalē cikloidai, o todel linija TE⊥OT yra liečiamoji cikloidai. Toks yra kinematikos pamatuotas būdas išvesti liečiamoji cikloidai.

Kelias s pereitas momentalinio centro O laike t, jeigu apskritimas (P) ritinasi tolyginiai ant tiesiosios (O), išreiškiamas:

$$s = r.\theta = r.\omega t,$$

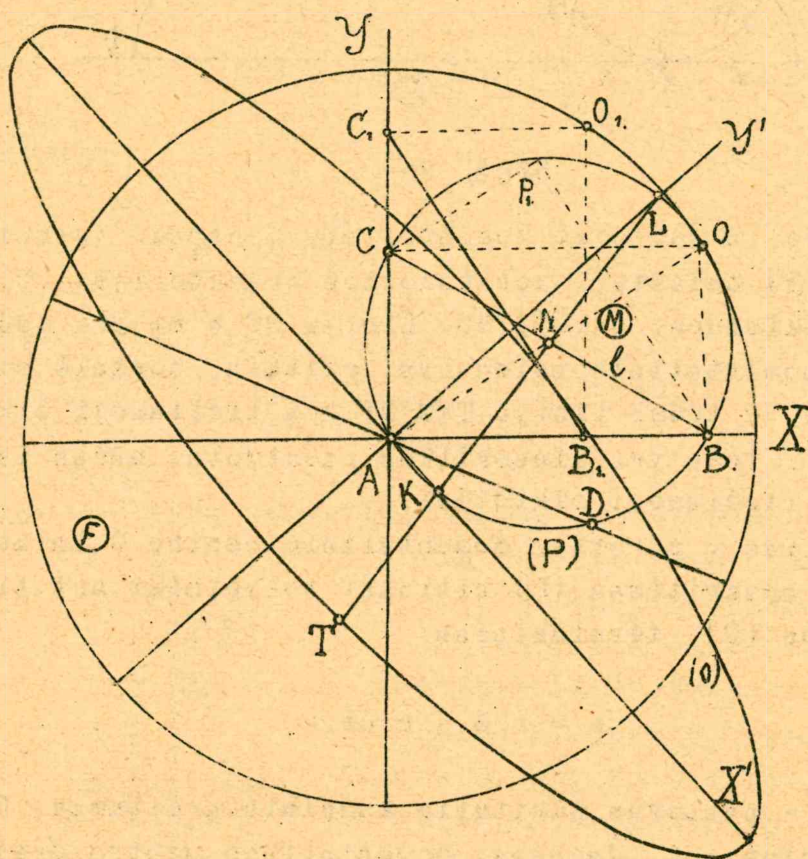
kur ω - pastovus skritulio kampinis greitumas. Diferenciuojant, gauname: momentalinio centro greitumas

$$u = \frac{ds}{dt} = r.\omega;$$

tas pats duoda viršminētą formulą del u, kadangi $R_2 = \infty$:

$$u = \omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\omega . R_1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} = \omega R_1, \text{ jeigu } R_2 = \infty .$$

2) Aukščiau nagrinėtame tiesiosios BC ilgumo l, slenkančios savo dviem taškais B ir C išilgai ašių AX ir AY judėjime (t.v. elipsinis judėjimas), (brėž. 95[a]) polis O randasi nuo taško A nuolatiniame nuotolyje l, reiškia nejudamoji poloida (O) yra apskritimas, aprašytas iš taško A spinduliu l.



brėž. 95[a]

Kad gauti judamą poloidą (P) padėtyje atatinkančioje imtam linijos BC pradžios padėjimui, reikia surasti tiesiosios BC keliose kitose padėtyse judėjimo polį ir pažymėti jo atatinkamą padėtį linijos BC pradžios padėjime. Tegu tos pačios tiesiosios kita

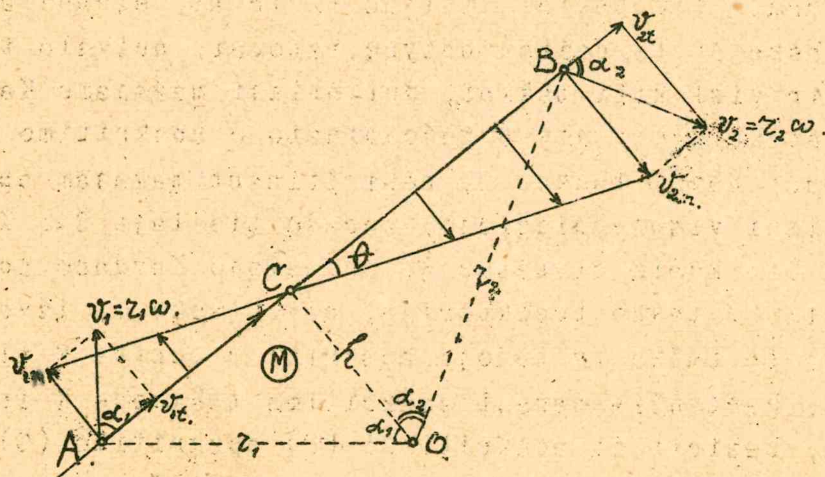
kuri nors padėtis yra B_1C_1 su momentaliniu centru O_1. Pastatysime trikampį $B_1C_1O_1$ ant linijos BC, gausime trikampį BCP, su stačiu kampu taške P_1; tą pačią ypatybę turi ir kitos panašios taško P statybos; taškų P, arba stačiųjų kampų, atsiremiančių į liniją BC viršūnių geometrinė vieta yra apskritimas, turįs diametrą BC = 1 ir esantis plokščiosios sistėmos Ⓜ elipsinio judėjimo judamąja centroida (P). Abu apskritimai (P) ir (O), vadinamieji K a r d a n o a p s k r i t i m a i s, liečiasi momentalinio centro taške O; mažasis apskritimas yra nuolat surištas su tiesiąja BC ir be slydimo ritasi didžiojo apskritimo viduje. Kaip aukščiau matėme, kiekvienas linijos BC taškas aprašo taip judėdamas elipsą; taškas N - linijos BC vidurys - aprašo apskritimą su spinduliu $\frac{1}{2}$; taškai B ir C, gulintieji apskritime (P) aprašo tiesiąsias linijas AX ir AY, einančias per tašką A; tą pačią ypatybę, matomai, privalo turėti ir visi kiti taškai, gulintieji mažajame Kardano apskritime: jie aprašo didžiojo apskritimo diametrus; pav., taškas D, besiritinant mažajam apskritimui viduje didžiojo, aprašo tiesiąją DA. Kad rasti bet kurio sistėmos BC ar mažojo Kardano apskritimo M taško traektoriją, pav. taško T, išvedame per tą tašką ir mažojo apskritimo centrą N liniją TN, kertančią mažąjį apskritimą taškuose K ir L, kurie, besiritant apskritimui (P) apskritimo (O) viduje, aprašo tarpusavio statmenus didžiojo apskritimo diametrus AX' ir AY', vadinasi atkarpa KL= = 1 slenka savo galiniais taškais išilgai nejudamų statmenų tiesiųjų AX' ir AY', reiškia taškas T, gulintis linijoje KL, aprašo elipsą su centru A ir pusašiais TL ir TK, nukreiptais išilgai nejudamų ašių AX' ir AY'. Deliai šitos Kardano mažojo apskritimo sistėmos kiekvieno taško ypatybės didžiojo

Kardano apskritimo plokšmēje aprašyti elipsą, tasai šitų apskritimų judējimas ir vadinamas elipsiniu.

PLOKŠČIOSIOS SISTĒMOS Ⓜ JUDANČIOS SAVO PLOKŠMĒJE TAŠKŲ GREITUMAI IR GREITĒJIMAI.

T e o r e m a. Tiesiosios linijos, priklausančios plokščiai judančiai sistēmai Ⓜ taškų greitumai turi vienodas projekcijas į pačios tiesiosios kryptį, lygias artimiausiam nuotoliui h momentalinio centro nuo tiesiosios, padaugintam iš sistēmos sukimosi kampinio greitumo ω, reiškia lygias $h.\omega$.

Į r o d y m a s. Tiesiojoje AD (brēž. 96) paimsime du kokius nors taškus A ir B ir trečią tašką C statmens, nuleisto iš momentalinio centro O į AB pamatę. Taško A greitumas yra $v_1 = r_1\omega$, kame r_1=AO,



brēž. 96

ω - sistēmos sukimosi kampinis greitumas. išsklaidydami taško A greitumą tiesiosios AB ir statmens jai kryptimis, rasime, kad išilginis sudedamasis lygus:

$$v_{1t} = r_1\omega\cos\alpha_1 = \omega h = const.,$$

kame $h = r_1 \cos\alpha_1$ yra trumpiausias momentalinio centro O nuotolis nuo linijos AB; skersinis sudedamasis yra:

$$v_{1n} = r_1\omega \sin\alpha_1 = \omega.\overline{AC}.$$

Tuo pačiu būdu rasime, kad taško B sudedamieji greitumai yra

$$v_{2t} = \omega h, \quad v_{2n} = \omega.\overline{BC}.$$

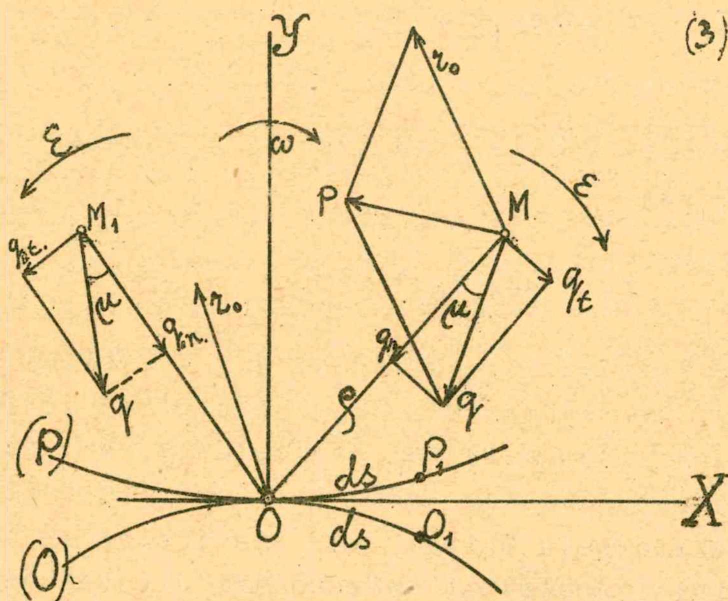
Išilginių sudedamųjų pastovumas yra tiesiosios AB ilgumo pastovumo pasekmė: jeigu šitie sudedamieji būtų vienas kitam nelygūs, tai reikštų, kad nuotoliai tarp tiesiosios taškų keistųsi. Iš aukščiau pasakyto seka taipgi, kad tiesiosios AB taškų skersiniai greitumai vaizduojami diagramoje tiesiąja, einančia per tašką C ir sudarančia su AD kampą θ, kuriam

$$tg\theta = \omega.$$

Teorema. Plokščiajai sistēmai bet kaip judant jos plokšmėje yra vienas taškas, kurio greitėjimas lygus nuliui, vadinasi, judantis tolyginiai ir tiesiaeigiai; šitas taškas vadinamas greitėjimų centru.

Tegu plokščiosios sistēmos judėjimas išreiškiamas judamos centroidos (P) ritimosi nejudama (O) (brėž. 97) gi tuo tarpu momentalinis centras randasi taške O. Sistēmos P, kurios visi taškai sukasi apie O su kampiniu greitumu ω ir su kampiniu greitėjimu $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$. Kokio nors taško M judė-

jimas gali būti nagrinėjamas, kaipo sudėtinis iš taško M sukimosi apskritimu spindulio ρ = OM apie O, kaipo judamos koordinatų ašių OXY sistemos, turinčios žengimo judėjimą, vienodą su taško O judė-



brėž. 97

jimu, centrą. Pastarasis gi, nors duotame momente turi greitumą lygų nuliui, bet jojo greitėjimas skiriasi nuo nuliaus, kaip toliau pamatysime. Todel taško M pilnas greitėjimas p bus geometrinė reliatyvaus sukimosi apie polį O greitėjimo q ir polio O žengimo judėjimo greitėjimo r_0 suma. Sukimo judėjimo greitėjimas, kaip matėme, išreiškiamas formula:

$$q = \rho\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2},$$

kame ρ = OM ir palinkęs kampu μ į taško M radiusa vektorį ρ, o $\operatorname{tg}\mu = -\frac{\varepsilon}{\omega^2}$ ir kampas μ atidedamas kampinio greitėjimo ε pusėn (dešinėn, jeigu $\frac{d\omega}{dt} > 0$,

kairēn - jeigu $\frac{d\omega}{dt} < 0$, kaip parodyta taškui M_1). Todel, jeigu polio O transliacijos judējimo greitējimo r_0 kryptis ir didumas bus žinomi, tai parinkę taško M radiuso vektorio kryptį OM, palinkusią į r_0 kampu μ ir paēmę tašką M tokiame nuotolyje ρ nuo polio O, kad:

$$r_0 = q = \rho\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2},$$

gausime tokį tašką $M_0 = C$, kurio pilnas greitējimas yra

$$p = r_0 - q = 0.$$

Šitas taškas vadinamas plokščiosios sistēmos greitējimų centru ir turi duotame momente tolyginį ir tiesiaeigį judējimą.

(92 br)

Jeigu nukelti į jį judamos koordinatų ašių CXY sistēmos, judančios žengimo judējimu drauge su greitējimų centru C, centrą, tai kurio nors sistēmos (P) taško L greitējimas apibūdinamas kaipo sudētinis iš sukimosi apie centrą C greitējimo, lygaus $\rho_C\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}$ (kame ρ_C = LC), palinkusio į taško L radiusą vektorių kampu μ ir polio C greitējimo, lygaus nuliui, vadinasi bet kurio plokščiosios sistēmos taško pilnas greitējimas yra toks, tarytum sistēma suktusi apie C, kaip apie nejudomą duotame momente centrą. Lieka surasti greitējimų centro C vietą, kuriam tikslui rasime momentalinio centro O greitējimą. Duotame momente taško O greitumas lygus nuliui, bet sekančiame momente t+dt, kada liesis abiejų centroidų taškai P_1 ir O_1, kurie randasi nuo O nuotolyje ds = udt, kame u yra momentalinio centro O judējimo centroidomis greitumas, taško O greitumas, besisukančio apie O_1 kam-

piniu greitumu ω, bus:

$$ds.\omega = u.dt.\omega$$

ir nukreiptas išilgai normalės OY į centroidas, aukštyn. tas pats dydis bus polio O greitumo geometrinis padidėjimas $d\sigma$, vadinasi,

$$d\sigma = u.dt.\omega,$$

dalydami abi dalis iš dt, randame polio O greitėjimą:

$$r_0 = \frac{d\sigma}{dt} = u.\omega.$$

Bet aukščiau mes matėme, kad:

$$u = \omega \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2},$$

todel:

$$r_0 = \omega^2 \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$$

ir nukreiptas išilgai normalės OY aukštyn. Čia R_1 ir R_2 yra abiejų centroidų kreivumo spinduliai. Atidėsim normalėje OY ilgį (100 brėž.)

$$ON = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = d.$$

Gautasai taškas N vadinamas pasisukimo tašku. Ant linijos ON, kaip diametro (brėž. 98) išbrėšime apskritimą ir iš taško O išvesime kertamą, kampu μ į ON; styga ρ = OC surandama:

$$\rho = OC = d.\cos\mu = \frac{d}{\sqrt{1+tg^2\mu}} = \frac{d}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{\omega^4}}} = \frac{\omega^2 d}{\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}},$$

iš čia:

$$q_c = \varrho\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2} = \omega^2 d = r_o.$$

Tokiu būdu mes matome, kad greitėjimai q_c ir r_o lygūs ir priešingos pakraipos, todel

$$p_c = q_c + r_o = 0,$$

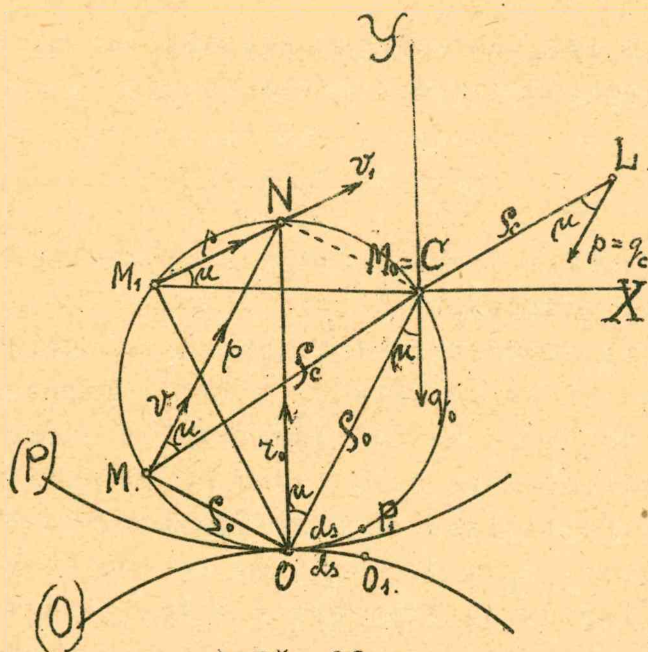
vadinasi taškas C yra plokščiosios sistėmos (P) greitėjimų centras.

Paimsime apskritime NCO kokį nors tašką M ir sujungsime jį su taškais N, C ir O. Kampas NMC = = kampui NOC = μ, kaipo įrašytieji į apskritimą ir remiantiesi į tą patį lanką NC. Todel taško M pilnasis greitėjimas p, nukreiptas kampu μ ir radiusą vektorį ϱ_c = MC, sutampa su linija MN; su ta pačia linija sutampa taško M greitumo v kryptis, nes MN statmenas MO, o greitumas v statmenas taško M radiusui vektoriui ϱ_o = MO. Vadinasi visi sistėmos (P) taškai, gulintieji duotame momente t apskritime NCO turi greitumus ir greitėjimus vienos krypties ir einančius per pasisukimo tašką N, gulinti bendroje normalėje centroidoms nuo momentalinio centro O nuotolyje

$$d = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

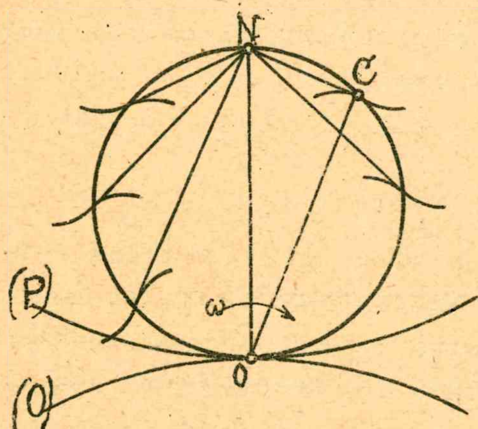
Tai reiškia, kad, visų pirma, liečiamosios, išvestos per apskritimo NCO taškus M, M_1 traektorijoms, tų taškų aprašomoms, eina per pasisukimo tašką N ir kad, pagaliau, tų traektorijų kreivumo spindulys r apskritimo NCO taškuose $M, M_1', \ldots$ lygus begalybei; tai seka iš to, kad greitėjimas p, sutampąs su taško traektorijos liečiamąja, susideda

tik iš tangencialinio greitėjimo $p_t = \frac{dv}{dt}$, o normalinis $p_n = -\frac{v^2}{r}$ lygus nuliui; bet greitumas v nuliui nelygus, reiškia traektorijos kreivumo spindulys r



brėž. 98

lygus begalybei. Tai reiškia, kad apskritimo NCO taškų traektorijos turi šitame apskritime persilenkimus, kurių kryptys susieina taške N (brėž. 99). Todel apskritimas NCO vadinamas persilenkimų, arba de la Hire'o apskritimu. Jeigu ritant sistėmą (P) laikrodžio rodiklio kryptimi, vadinasi, kada $\omega>0$, kampinis greitėjimas $\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}>0$, tai greitėjimų centras C randasi dešinėje NO, jei-

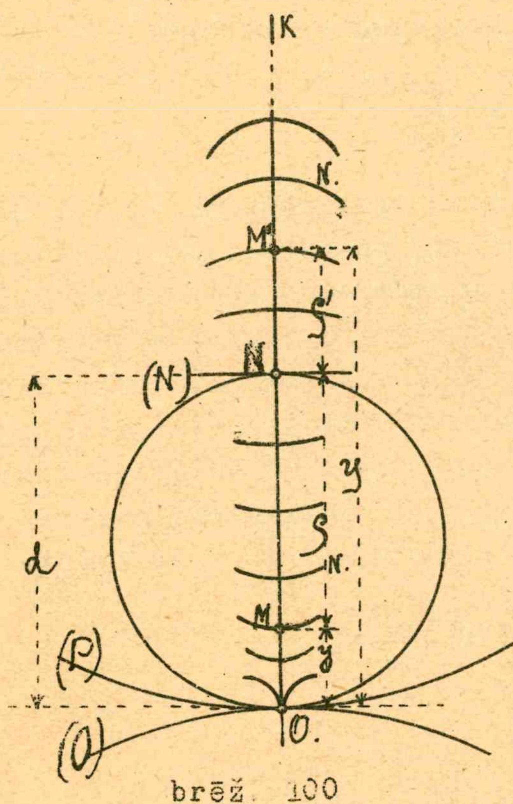


brėž. 99

gu gi $\varepsilon<0$, tai O guli kairėje persilenkimų apskritimo pusėje; pagaliau, kada $\varepsilon = 0$, arba $\omega = const$, tai greitėjimų centras randasi pasisukimo taške N ir $M = 0$; visų sistėmos taškų greitėjimai nukreipti į tašką N ir išreiškiami formula:

$$p = \rho\omega^2,$$

kame ρ_N - taško nuotolis nuo N. Daleidę, kad $\omega = const.$ ir nagrinėdami normalės ONK (brėž. 100) įvairių taškų greitėjimus, mes matome, kad sistėmos taškų, gulinčių normalėje žemiau N, greitėjimai nukreipti aukštyn į greitėjimų centrą N ir auga proporcingai nuotoliui nuo N; sistėmos taškams, gulintiems normalėje aukščiau N - greitėjimai nukreipti žemyn į greitėjimų centrą N ir auga tuo pačiu proporcingumo nuotoliams nuo N dėsniu. Iš kitos pusės žinoma, kad taškui tolyginiai judant savo traektorija, greitėjimas išreiškiamas formula



brėž. 100

$$p = \frac{v^2}{r},$$

kame r - traektorijos kreivumo spindulys, ir nu-

kreiptas į kreivumo centrą.

Prilyginsim abu reiškiniu kokio nors taško M, gulinčio normalėje ON de la Hire'o apskritimo viduje nuotolyje y nuo momentalinio centro O, greitėjimams:

$$\rho_N \omega'^2 = \frac{v^2}{r}$$

arba

$$(d-y)\omega'^2 = \frac{(\omega y)^2}{r},$$

iš kur traektorijos kreivumo spindulys:

$$r = \frac{y^2}{d-y}.$$

Iš čia matoma, kad taškų, gulinčių normalėje de la Hire'o apskritimo viduje, traektorijos nukreiptos išgaubimu apačion ir jų kreivumo spinduliai auga nuo r = 0 taškui O, kame y = 0, iki r = ∞ taškui N, kame y = d. Taškas N juda tiesiaeigiu tolyginiu judėjimu, kaip kad dera sistēmos greitējimų centrui. Taškų, gulinčių normalėje NK aukščiau taško N, traektorijos nukreiptos išgaubimais aukštyn ir turi kreivumo spindulius, surandamus iš lygčių:

$$(y-d)\omega'^2 = \frac{(\omega y)^2}{r},$$

arba:

$$r = \frac{y^2}{y-d},$$

kame y - taško M' nuotolis nuo momentalinio centro O; šitie spinduliai mažėja nuo r = ∞ prie y = d, iki r = 4d, prie y = 2d, atsakančio min r, gaunamo

iš sąlygos:

$$\frac{dr}{dy} = 0, \text{ arba: } \frac{(y-d)2y-y^2}{(y-d)^2} = 0 \text{ arba}$$

$$2y^2-2dy-y^2 = 0; \; y^2-2dy = 0: \; y(y-2d) = 0$$

$$y-2d = 0; \; y = 2d; \; r = \frac{y^2}{y-d} = \frac{4d^2}{d} = 4d.$$

Toliau, negu 2d, didėjant y spinduliai r auga iki begalybės prie $y = \infty$.

brēž. 101

Tegu OCN (brēž. 101) yra de la Hire'o apskriti-

mas ir C - greitėjimų centras. Pratęskime liniją NC iki susikirtimo taške T su bendrąja centroidoms liečiamąja OT ir per taškus O, C ir T išveskime apskritimą. Linija OT = b bus šito apskritimo diametras, nes kampas OCT - statusis. Kokiam nors sistēmos (P) taškui, gulinčiam apskritime OCT, greitėjimas p turės kryptį MO, nes jis turi būti palinkęs kampu μ į radiusą vektorį ϱ_c = CM, o iš brėžinio matoma, kad

$$\angle OMC = \angle OTC = \angle CON = \mu .$$

Tokiu būdu, kiekvieno apskritimo OCT, vadinamo Bresse'o apskritimu, taško greitėjimas nukreiptas išilgai radiuso vektorio ϱ_0 į momentalinį centrą O, taško M greitumui v statmenai, vadinasi, tai yra taško M traektorijai normalinis greitėjimas, lygus

$$p_n = \frac{v^2}{r},$$

kame r - traektorijos kreivumo spindulys, tangencialinis gi greitėjimas

$$p_t = \frac{dv}{dt} = 0.$$

Vadinasi, Bresse'o apskritimas, kurio diametras yra:

$$b = \frac{d}{tg\mu} = \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)tg\mu}$$

vaizduoja sistēmos taškų, judančių tolyginiai savo traektorijomis kiekvienam sistēmos (P) judėjime ir todel turinčių tik normalinius (įcentrinius) greitėjimus, nukreiptus į momentalinį centrą O, geo-

metrinę vietą. Reikia pastebėti, kad de la Hire'o apskritimo diametras nepareina nuo to, kaip juda sistēma (P):

$$d = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

gi Bresse'o apskritimo diametras

$$b = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) tg\mu}$$

turi savyje keičiamąjį dalyklį

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

kuris virsta nuliu, jeigu kampinis greitumas ω pastovus ($\varepsilon = 0$). Bresse'o apskritimo diametras b mainosi drauge su greitējimų centro B padētim de la Hire'o apskritime ir virsta begalybe, o Bresse'o apskritimas - normale ON, kada $tg\mu = 0$ arba ω = const. Kad surasti įvairių plokščiosios sistēmos taškų greitējimus, jeigu žinomi dviejų kokių nors jos taškų greitējimai (pavyzdžiui, garo mašinos skriejiko, kurio galutinių taškų greitējimai lengva susekti), galima pritaikinti greitējimo išskiaidymo žengiamuoju ir sukimosi greitējimais principą. Tegu (brėž. 102) žinomi tiesios AB taškų A ir B greitējimų duotame momente didumai ir kryptys. Tie greitējimai vaizduojami atkarpomis p_A ir p_B. Į taško B judējimą žiūrime, kaipo į sudētinį iš žengimo vienodo su taško A judējimu ir sukimosi apie tą patį tašką. Tada turime:

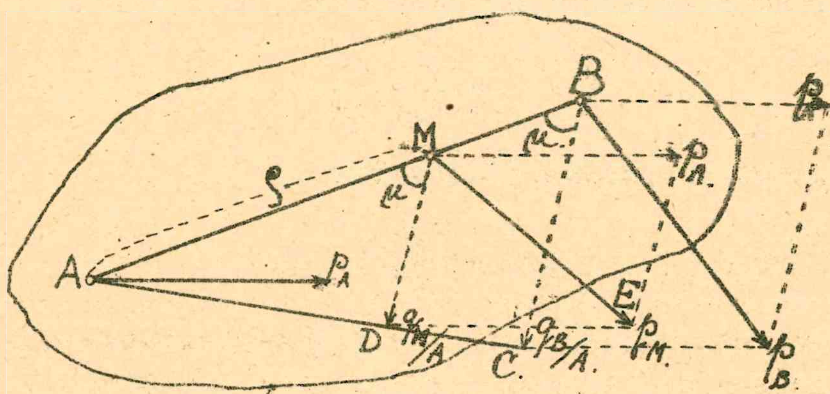
$$\overline{p_B} = \overline{p_A} + \overline{q_{B/A}},$$

kame q yra taško B judējimo taško A atžvilgiu su-

kantysis greitėjimas. Statome greitėjimą q_B, kaipo geometrinį skirtumą p_B ir p_A:

$$\overline{q_{B/A}} = \overline{p_B} - \overline{p_A}.$$

Mums žinoma, kad tiesiosios AB visų taškų sukan-



brėž. 102

tieji greitėjimai taško A atžvilgiu yra lygiagretūs $q_{B/A}$ ir proporcingi duotojo taško M nuotoliams ρ nuo A. Todel vektorio $q_{B/A}$ galą sujungiame su A tiesiąja AC ir kokio nors tiesiosios AB taško M greitėjimo p_M suradimui išvedame per M lygiagretę liniją kryp̃čiai $q_{B/A}$ iki susikirtimo su linija AC; atkarpa MD vaizduoja taško M sukantįjį greitėjimą $q_{M/A}$, o jo pilnasis greitėjimas bus geometrinė suma $q_{M/A}$ ir p_A, vadinasi

$$\overline{p_M} = \overline{q_{M/A}} + \overline{p_A} = \overline{M\varepsilon}.$$

CENTROIDŲ ANALITINIS SURADIMAS PLOKŠČIOSIOS FIGUROS JUDĖJIMUI.

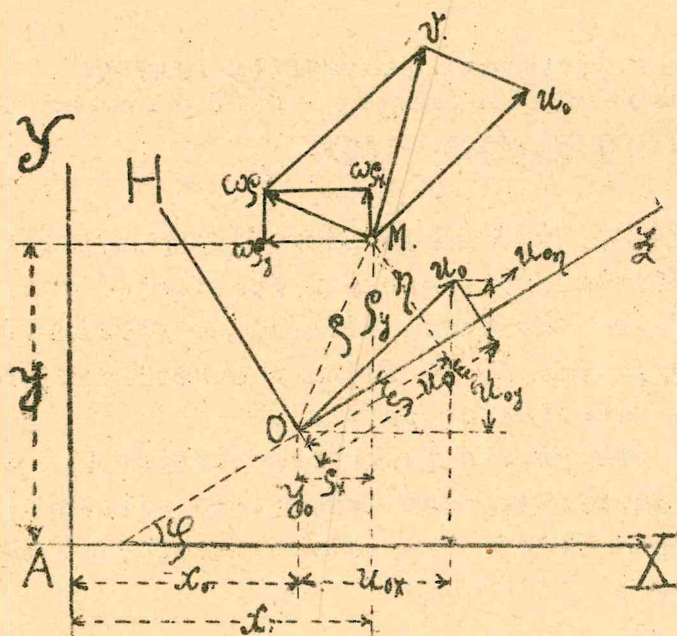
Kokios nors plokščiosios sistėmos OΞH judėjimas jos plokšmėje bus žinomas, jeigu bus duoti kaipo

žinomos laiko funkcijos sistēmos pradžios taško O koordinatos x_o ir y_o, o taipogi kampas $\varphi = \measuredangle$ OX (brēž. 103).

Tada kokio nors apibrēžto judamos sistēmos taško M su reliatyviomis koordinatomis ξ ir η absoliutinēs koordinatos išreiškiamos žinomomis mums (pusl.) lygtimis:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_o + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ y &= y_o + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

To paties apibrēžto taško (ξ, η) absoliutinio



brēž. 103

greitumo v projekcijos į AX ir AY gaunamos iš lygčių (A), diferencijuojant jas sulig t skaitant

ξ ir η pastoviomis. Gausime:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = u_{ox}-(\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi)\omega \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = u_{oy}+(\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi)\omega \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Palyginę reiškinius (A) su (B), matome, kad:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= u_{ox}-(y-y_o)\omega \\ v_y &\mp u_{oy}-(x-x_o)\omega \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

Šitos formulos išreiškia geometrinę lygybę:

$$\bar{v} = \bar{u}_o+(\bar{\rho\omega}) \qquad (D)$$

kurios prasmė ta, kad kurio nors sistėmos $\xi O H$ taško M absoliutinis greitumas yra geometrinė suma sistėmos žengimo greitumo, vienodo su koordinatų pradžios O greitumu u_o ir taško M sukančiojo greitumo $\rho\omega$ apie koordinatų pradžią O.

Tikrai, suprojektave geometrinę lygybę D į ašis AX ir AY ir pastebėję, kad sukančiojo greitumo $(\bar{\rho\omega})$, nukreipto statmenai radiusui vektoriui $\rho=OM$ projekcijos yra:

$$(\rho\omega)_x = -\omega\rho_y = -\omega(y-y_o)$$

$$(\rho\omega)_y = +\omega\rho_x = +\omega(x-x_o)$$

(del stačiųjų trikampių, sudaromų atkarpomis ($\omega\rho$), $(\omega\rho)_{\xi}$, $(\omega\rho)_{\eta}$ ir ρ, ρ_{η}, ρ_{ξ} panašumo), gauname reiškinius (C).

Projektuodami geometrinę lygybę (D) į judamas koordinatų ašis $O\xi$ ir OH, randame:

$$\left.\begin{aligned} v_{\xi} &= u_{o\xi} - \eta\omega \\ v_{H} &= u_{oH} + \xi\omega \end{aligned}\right\} \quad (E)$$

Kad suradus $u_{o\xi}$ ir u_{oH} kaipo duotųjų mums dydžių

$$u_{ox} = \frac{dx_o}{dt}, \quad u_{oy} = \frac{dy_o}{dt}$$

funkcijas, galime pasinaudoti reiškiniais:

$$\left.\begin{aligned} u_{o\xi} &= u_{ox}.\cos\varphi + u_{oy}.\sin\varphi \\ u_{oH} &= -u_{ox}.\sin\varphi + u_{oy}.\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (F)$$

Momentalinis centras yra tai toks sistēmos ξOH taškas, kurio greitumas duotame momente lygus nuliui. Pažymėję tokio taško koordinatas nejudamoje koordinatų sistēmoje AXY per x_1, y_1, o judamoje ξOH - per ξ_1, ir η_1, gausime momentalinio centro koordinatoms sekančias sąlygas:

1) nejudamoje sistēmoje AXY:

$$v_x = 0, \quad v_y = 0,$$

vadinasi

$$\left.\begin{aligned} u_{ox}-(y_1-y_o)\omega &= 0 \\ u_{oy}+(x_1-x_o)\omega &= 0 \end{aligned}\right\}$$ iš kur:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_o + \frac{u_{ox}}{\omega} \\ x_1 &= x_o - \frac{u_{oy}}{\omega} \end{aligned}\right\} \quad (G)$$

2) Judamoje sistēmoje $\xi O H$:

$$v_\xi = 0, \; v_H = 0$$

arba

$$\left.\begin{aligned} u_{ox}.\cos\varphi+u_{oy}\sin\varphi-\eta_1\omega &= 0 \\ -u_{ox}.\sin\varphi+u_{oy}\cos\varphi+\xi_1\omega &= 0 \end{aligned}\right\}$$

iš kur

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{\omega}(u_{ox}.\cos\varphi+u_{oy}.\sin\varphi) \\ \xi_1 &= \frac{1}{\omega}(u_{ox}.\sin\varphi-u_{oy}.\cos\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (H)$$

Formulose (G) ir (H) antrosios formulos yra žinomos laiko funkcijos, todel kiekvienam laiko momen-

tui momentalinio centro koordinatos gali būti surastos kaip nejudomoje sistėmoje (x_1, y_1), taip ir judamoje (ξ_1, η_1). Todel reiškiniai (G) ir (H) yra nejudamos ir judamosios centroidų lygtys, išreikštos formoje:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= F_1(t) \\ y_1 &= F_2(t) \end{aligned}\right\} (G) \quad \text{arba} \quad \left.\begin{aligned} \xi_1 &= \Phi_1(t) \\ \eta_1 &= \Phi_2(t) \end{aligned}\right\} (H)$$

Kad gauti bendrą saryšį tarp koordinatų x_1 ir y_1, arba tarp ξ_1 ir η_1; reikia prašalinti laiką t iš lygčių (G) arba (H). Tada gausime abiejų centroidų lygtis paprastame pavidale:

$$f(x_1, y_1) = 0 \quad \text{ir} \quad \varphi(\xi_1, \eta_1) = 0.$$

Baigdami pastebēsime, kad kieto kūno plokščias laisvasis judējimas, trijų koordinatų apibrēžiamas, turi tris palaidumo laipsnius; dviejuose au aukščiau nagrinētuose pavyzdžiuose (cikloidinis ir eliptinis judējimas) plokščias judējimas duotas dviem savo poloidomis ir todel yra nepalaidas (laisvas), o suvaržytas; sistēmos M padētis suvokiama vienos koordinatos, pav. cikloidos sudarančiojo apskritimo centro abscisa x, arba linijos BC eliptiniai judančios, taško B abscisa x, sistēmos, taip suvaržytai judančios, su vienu palaidumo laipsniu, pritaikomoj mechanikoje vadinamos mechanuzmais.

KIETOJO KŪNO SUKIMASIS APIE NEJUDAMĄ TAŠKĄ.

Sferinės figuros judėjimas josios sferos paviršiuje.

Kaip aukščiau matėme, kūno sukimasis apie nejudamą ašį pilnai nusprendžiamas vienos koordinatos, būtent, meridiano plokšmės pasisukimo kampo $\theta = \varphi(t)$, iš kur galima gauti sukimosi kampinį greitumą

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \varphi'(t)$$

ir kampinį greitėjimą

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \varphi''(t).$$

Pavyzdžiui, žemės paros sukimasis apie savo ašį vyksta tolyginiai, vadinasi, pasisukimo kampas θ didėja proporcingai laikui ir padidėja ant 2π per 23 val. 56 min. 4 sek. = 86164 sek. = 23,934 val. vidutinio laiko; todel funkciją θ galima parašyti:

$$\theta = \frac{2\pi}{86164 \text{ sek.}} . t \text{ sek.}, \text{arba } \theta = \frac{2\pi}{23,934_v} . t \text{ val.}$$

toliau randame:

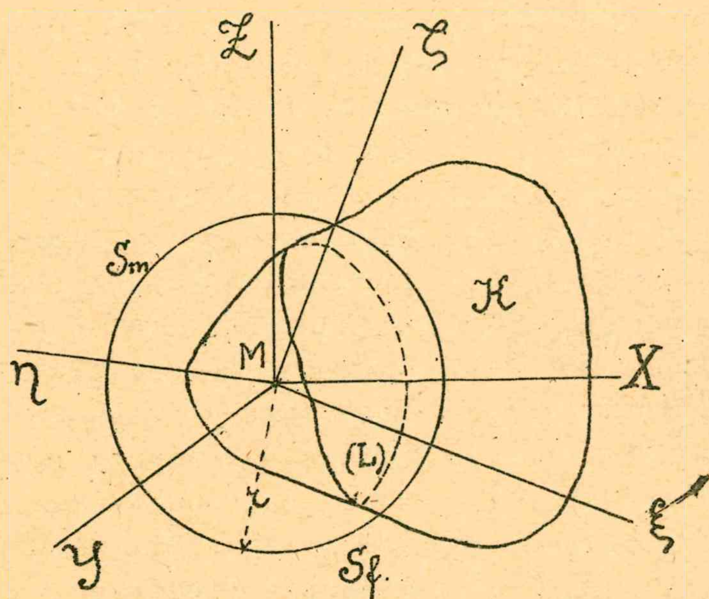
$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \cdot \frac{1}{\text{sek.}},$$

arba

$$\omega = \frac{2\pi}{23,934} \cdot \frac{1}{\text{val}} = \text{const} \qquad \varepsilon = 0$$

Kūno sukimasis apie vieną nejudamą taška M susekamas trijomis koordinatomis, pav. kampais A,B,C, duodančiais surištosios su kūnu judančios sistėmos ašių $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ kryptis nejudamų ašių MX, MY, MZ atžvilgiu Todėl toksai sukimasis turi tris palaidumo laipsnius, kaip kietojo kūno plokščias judėjimas ir bendrai su juo turi daug panašumo

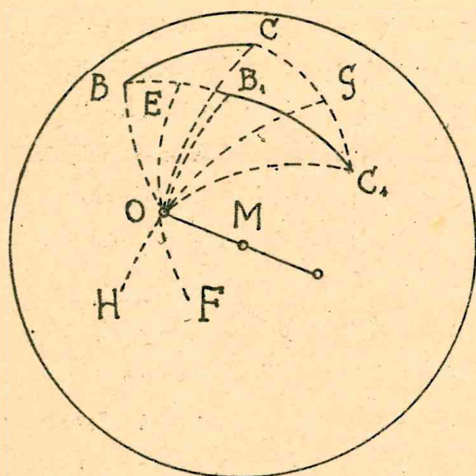
Įsivaizduokime sau sferą (brėž. 104) S_m spindulio r, surištą su kūnu K ir turinčią centrą M kieto kūno nejudamame taške. Tosios sferos su kūno paviršiumi persikirtimo linija duos kai kurią sferinę figurą (L), kuriosios visi taškai, kūnui K besisukant apue centrą M, liksis vis tame pačiame nuotolyje r nuo taško M, vadinasi bus paviršiuje kai kurios sferos S_f to paties spindulio r, turinčios tą patį centrą M, bet liekančios erdvėje nejudama (tiksliau. nepakeičiamai surišta su pagrindine



brēž. 104

koordinatų ašių MX, MY, MZ sistēma).

Figuros (L) judējimas pilnai apibrēžia kūno K sukimąsi ir atbulai. Figuros (L) judējimui nejudamoje sferoje Sf, reiškia, deliai kūno K sukimosi apie tašką M tinka teoremos, analoginēs išvestosioms del plokščiosios figuros judējimo jos plokšmēje. Sferinēs figuros (L) padētis jos sferoje surandama josios dviejų taškų padētim, kuriam tikslui reikalinga turēti tris pastarųjų koordinatas. Todel sferinēs figuros judējimas pilnai susektas, jeigu duota kokios nors josios atkarpos BC judējimas (didžiojo apskritimo lanko dalis tarp taškų B ir C). Sferinēs atkarpos BC perējimas į kitą padētį B_1C_1 gali būti atliktas sukimo apie kai kurį tašką O sferos paviršiuje pagalba (brēž. 105).

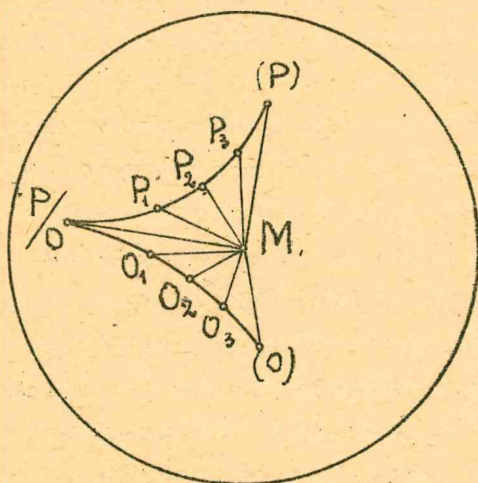


brēž. 105

Taškas O randamas tokiu pat būdu, kaip plokščiosios figuros persislinkimo jos plok plokšmēje centras; tiktai tiesiųjų vietoj čia tenka verstis didžiųjų apskritimų lankais. Sujungę taškus B ir B_1 lanku BB_1, jo vi viduryje išvedame statmenį EF; taip pat sujungiame C ir C_1 ir lanko CC_1 viduryje išvedame statmenį GH. Jeigu lankų EF ir GH susikirtimo tašką O sujungsime didžiųjų apskritimų lankais su taškais B, C, B_1 ir C_1, gautieji sferiniai trikampiai OBC ir OB_1C_1 bus lygūs, reiškia sukdami trikampį OBC apie tašką O sferos Sf paviršiuje galime jį atvesti į padētį OB_1C_1, vadinasi, atkarpą

BC pervesti į kitą padėtį B_1C_1 sukant ją sferos paviršiumi apie tašką O, arba kas vistiek, apie ašį OM, einančią per sferos centrą M. Jeigu BC ir B_1C_1 yra dvi be galo artimos atkarpos padėtys, tai normalės, išvestos sferos paviršiuje traektorijų elementams BB_1 ir CC_1, susikerta momentaliniame centre, arba polyje O, kuriam atatinka sferos S_f diametras OM, kaipo momentalinė sukimosi ašis. Vadinasi, į kokios nors figuros sferos paviršiuje elementarinį judėjimą galima žiūrėti, kaipo į sukimąsi apie polį O sferos paviršiuje, arba apie sferos diametrą OM, kaipo momentaline ašį. Polis O ir atatinkamoji momentalinė ašis OM surandami dviejų figuros taškų to paties laiko greitumų kryptimis. Tam atatinkamai, į kietojo kūno sukimąsi apie nejudamą tašką M kiekvienu momentu galima žiūrėti kaip į sukimasi apie kai kurią momentalinę ašį OM, einančią per tašką M; tosios sukimosi ašies kryptis surandama iš sferinės figuros dviejų taškų to paties laiko greitumų krypčių. Duotajam baigtiniam judėjimui kiekvienai sferinės figuros (L) padėčiai atatinka tam tikras polis O ir tam tikra momentalinė ašis OM. Polių O geometrinė vieta nejudamoje sferoje S_f yra sferinė nejudamoji poloida (O), momentalinių ašių OM geometrinė vieta yra kūginis paviršius, arba taip vadinamas nejudamas aksoidas (OM), turintis viršūne taške M (brėž. 106). Kietajam kūnui besisukant sujungtoji su juo judamoji sfera S_m slysta apie nejudamą sferą S_f turėdama kiekviename momente nejudamą tašką P, sutampanti su nejudamosios sferos tašku O ir per kurį eina momentalinė ašis OM. Taškų P visuma judamoje sferoje S_m sudaro judamąją sferine poloidą (P). Ji yra vedamoji kūginiam paviršiui, sudarytam momentalinių ašių

(PM) su viršūne taške M, vadinamam judamuoju aksoidu. Judamoji sferinė poloida (P) turi su nejudama poloida (O) visumet bendrą momentalinio centro tašką, kuris išeina abi dviem kreivosiomis (O) ir (P) lygius lankus, taip, jog judamoji poloida ritinasi be slydimo apie nejudamą arba dar galima išsireikšti, kad judamasis aksoidas (PM) ritinasi nejudamajame aksoide (OM).



brėž. 106)

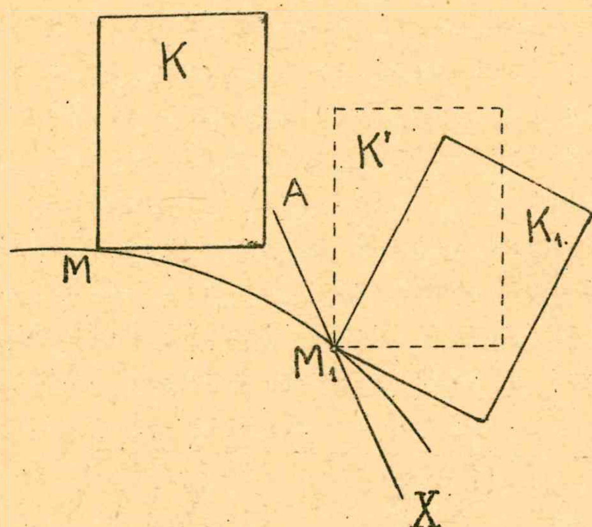
Vadinasi, į kiekvieną sferinės figuros (L) judėjima josios sferoje galima žiūrėti, kaip į surištosios su figura sferinės poloidos (P) ritinimąsi nejudamoje sferinėje poloidoje (O); atatinkamai tam kieto kūno sukimasis apie nejudamą tašką M tolygus nepakeičiamai surišto su kūnu judamojo aksoido ritinimui nejudamajame aksoide; abu tuodu aksoidu turi kieto kūno nejudamame taške M bendrą viršūne.

BENDRASIS KIETO KŪNO JUDĖJIMO ATVĖJIS.
ĮVIJAS (SRAIGTO) JUDĖJIMAS

Tegu taškai K ir K_1 (brėž. 107) yra du kokio nors kūno be galo artimi padėjimai, o koks tai kūno taškas M pereidamas iš pirmosios padėties į antrąją aprašo tam tikrą kelią MM_1.

Sitą kūno perėjimą iš K į K_1 galima įvykdyti taip, kad iš pradžios perkelti kūną žengiamuoju judėjimu (lygiagrečiai sau pačiam) į tarpine padė-

tį K', o paskui pasukti kūną apie tašką M_1 iki padėties K_1. Toks be galo mažas sukimasis apie tašką M_1, kaip matėme suvedamas į kūno sukimąsi apie kai kurią ašį AX, einančią per tašką M. Reiškia, į kiekvieną kieto kūno elementarinį persislinkimą galima žiūrėti, kaipo į sudarytą iš elementarinio žengimo ir elementarinio sukimosi apie kai kurią momentalinę ašį. Jeigu abi kietojo kūno padėtys k ir k_1 r andasi viena nuo kitos baigtiniame nuotolyje ir kai kuris kūno taškas M aprašo baigtinį kelią MM_1, tai panašiai kūno judėjimą sklaidydami į žengiamąjį ir sukimosi, mes turime kūnui suteikti sukimąsi apie tašką M, einantį savo tikrąjį kelią MM_1, o tai reiškia, kad judamasis aksoidas (PM), surištas su kūnu, turi riedėti kitame aksoide (OM), turinčiame lygiagrečiai žengiamąjį judėjimą, vienodą su taško M judėjimu; abu aksoidu turi bendrą viršūnę judančiame taške M. Tokiu būdu, kiekvienas kieto kūno baigtinis judėjimas gali būti suprantamas, kaipo nepakeičiamai surišto su kūnu judamojo aksoido riedėjimas kitame judamame aksoide, turinčiame žengiamąjį judėjimą, vienodą su tojo kūno taško M (parenkamo bet kaip) tikrąja traektorija; taš-



brėž. 107

kas M yra bendroji abiejų aksoidų viršūnė.

Pasirinkdami vedamuoju tašku M šį, arba kitą kūno tašką, duotajam kūno persislinkimui gausime įvairius žengiamąjį ir sukimosi judėjimus. Tokiu būdu duotasis kūno judėjimas gali būti išskaidytas begaline būdų daugybe į žengimą ir sukimąsi. Bet paprasčiausias išskaidymas gaunamas tada, kada taškas M parinktas taip, kad žengimo ir kūno sukimosi ašies kryptys sutampa, vadinasi, kada kūnas tos ašies atžvilgiu juda įvijai (sraigto judėjimu). Išnagrinėsime kūno elementarinį persislinkimą, kuriame kai kuris jo taškas M pereina į M_2 ir, be to, kūnas pasisuko kai kuriuo elementariniu kampu $d\theta$ apie momentaline ašį AM_2X. Išvesi-

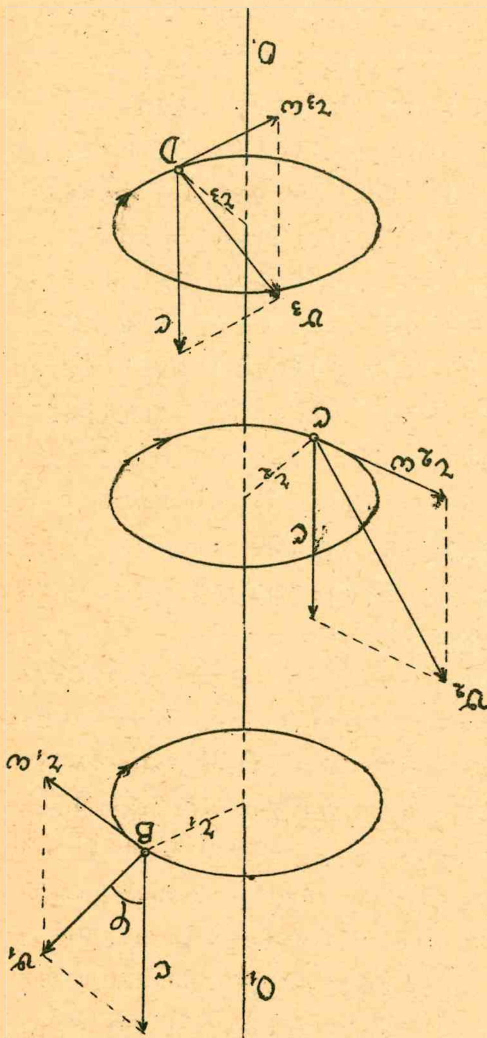
brėž. 108

me per kūno tašką M plokšme Q statmena sukimosi ašiai AX ir tegu linija (L) yra kūno paviršiaus kirtimas šitąja plokšme. Žengiamasis elementari-

nis judējimas išilgai MM_2 perkelia figurą (L) į padėjimą $(L_2)||(L)$; tosios figuros elementarinis pasisukimas plokšmėje $Q_1||Q$ apie ašį AX kampu $d\theta$ nustumia ją į galūtine padėtį (L_3). Bet figuros persislinkimas iš pirmosios padėties (L) į galūtine (L_3) gali būti įvykdytas ir kitu būdu: pastumiame figurą (L) žengiamai nuotoliu $\Delta S = MM_1$ lygiagrečiai sukimosi ašiai AX, į tarpine padėtį (L_1), o iš josios perkeliame į galūtinę padėtį (L_3) sukdami plokšmėje Q_1 apie šito persislinkimo momentalinį centrą O_1 arba apie momentaline ašį $O_1X||AX$. Tokiu būdu, jeigu mes būtumēm pasirinkę vedamuoju tašku kokį nors kūno tašką P, gulintį momentalinėje sukimosi ašyje OX, tai paimtoji plokšmėje Q figura (L), apibrēžiančioji kūno padėtį, gali būti pervesta iš pradžios padėjimo (L) į galūtinį (L_3) iš pradžios **žengiamuoju** judėjimu išilgai momentalinės ašies OO_1 tarpe $\Delta S = OO_1 = PP_1$, o paskui sukant ją kampu $\Delta\theta$ apie tą pačią ašį. Toks kūno sudėtinis judėjimas vadinasi sraigto (įviju) judėjimu. Jeigu c yra kūno žengiamojo judėjimo išilgai momentalinės sraigto ašies OO_1 greitumas ir ω - kūno sukimosi apie tą pačią ašį kampinis greitumas (brėž. 109), tai trijų kūno taškų B, C ir D, esančių nuotoliuose r_1, r_2 ir r_3 nuo ašies OO_1 greitumai v_1, v_2 ir v_3 išreiškiami stačiakampainių, pastatytų iš greitumų c ir $r_1\omega$, c ir $r_2\omega$ ir c su $r_3\omega$ diagonalinis, arba stačiųjų trikampių, turinčių statinius c ir $r_1\omega$ ir t.t. ižambinėmis.

Kadangi šitieji trikampiai turi bendrąjį statinį c, tai jeigu tokius trikampius jiems patiems lygiagrečiai perkelti iki kraštinėms c sutapsiant su sraigto ašimi OO_1, sutalpinus visas viršūnes B, C, D viename taške M (brėž. 110), tai kraštinės

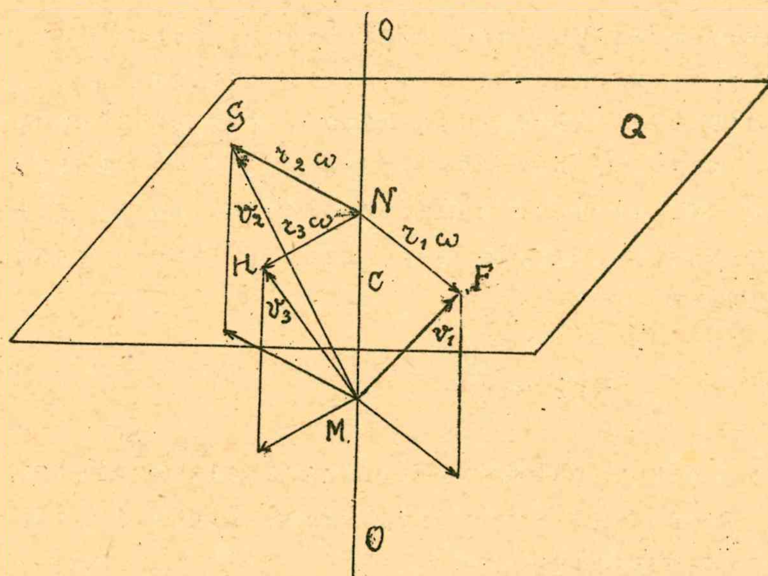
$r_1\omega$, $r_2\omega$ ir $r_3\omega$ gulēs vienoje plokšmėje Q (statmenoje ašiai OO_1), reiškia, toje pat plokšmėje gulēs atkarpų reiškiančių greitumus v_1, v_2 ir v_3 galai F, G ir H. Tuo pagrįstas yra grafinis radimas sraigto ašies OO_1, žengiamojo greitumo C ir kūno sukimosi kampinio greitumo ω, išeinant iš duotųjų kūno trijų taškų B_1 C ir D greitumų v_1, v_2 ir v_3 didumų ir krypčių. Tam tikslui (brēž. 110) iš kokio nors taško M išveda tris atkarpas, lygias ir lygiagretes duotiesiems greitumams v_1, v_2 ir v_3, per jų galus F, G, H išveda plokšme Q ir iš taško M nuleidžia į ja statmenį MN; jojo kryptis yra lygiagretē sraigto ašiai, o atkarpa MN = C = kūno žengiamajam greitumui išilgai tosios ašies. Paskui sujunge N su F, G ir H, gauname taškų B, C, D sukančiųjų greitumų didumus ir kryptis:



brēž. 109

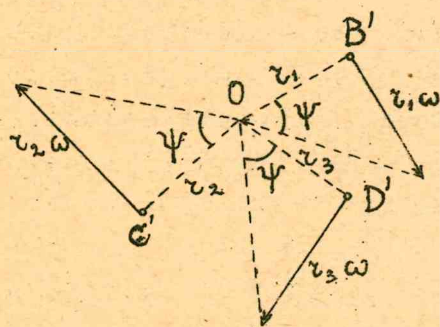
$$NF = r_1\omega,\ NG = r_2\omega,\ NH = r_3\omega.$$

Kad surasti sraigto ašies tikrąją padėtį ir ω-os didumą, projektuojame B, C ir D į kokią nors plokšme Q, statmeną sraigto ašies rastajai kryp-



brēž. 110

čiai; tegu tosios projekcijos bus B',C',D' (brēž. 111). Iš jų atidedame atkarpas, atatinkamai lygias ir lygiagretes taškų B,C,D sukančiųjų greitumų $r_1\omega$, $r_2\omega$ ir $r_3\omega$ dydžiams. Statmenys, išvestieji šitoms atkarpoms taškuose B', C', D', susikirs taške O, per kurį eina sraigto ašis O; statmenų OB', OC', OD' ilgumai yra radiusai vektoriai r_1, r_2, r_3, arba imtųjų taškų nuotoliai nuo ašies OO_1.



brēž. 111

Kampinis sukimosi greitumas ω randamas iš vie-

no iš trikampių:

$$\omega = tg\psi.$$

Iš pasakyto aišku, kad kūno taškų, gulinčių sraig sraigto ašyje, greitumai nukreipti išilgai tosios ašies ir lygūs c. likusiųjų kūno taškų greitumai v v didesni, negu c, būtent, lygus $\sqrt{c'^2+r'^2\omega'^2}$, kame r yra taško nuo sraigto ašies nuotolis; taško greitumas palinkes į sraigto ašį kampu φ, kuris randamas iš sąlygos:

$$tg\varphi = \frac{r\omega}{c}$$

Todel kūno taškų, gulinčių lygiagretėje sraigtui linijoje, greitumai visi tarp saves lygūs ir vienas kitam lygiagretūs.

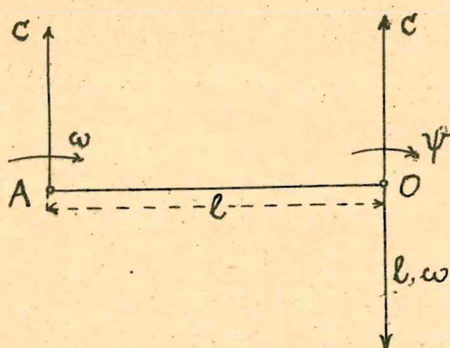
Tokiu būdu mes matome, kad kietojo kūno judėjimas duotame laiko elemente Δt gali būti išsklaidytas begaline daugybe būdų į elementarinį žengimą ir elementarinį sukimąsi apie momentaline ašį, bet viscs tos ašys bus viena kitai lygiagretės, o elementariniai žengimai gali skirtis didumu ir kryptimi; vienok, kiekvienu momentu kūne yra tokia vie viena tiesioji, lygiagretē kitoms momentalinēms sukimosi ašims, kuriosios taškai turi greitumus, nukreiptus išilgai tos ašies; imtajame momente kūnas turi sraigto judējimą apie šitą ašį. Todel ši ašis vadinama sraigto ašimi.

KIETOJO KŪNO JUDĒJIMŲ SUDĒTIS IR SKAIDYMAS.

1. Sukimasis ir žengimas.

Tegu kūnas sukasi apie ašį A su kampiniu greitumu ω ir dar juda žengiamai su greitumu C kryptimi

statmena ašiai A (brēž. 112). Tai bus, pav., jeigu žiedas suksis apie ašį, judančia žengiamai (ratas važiuojančio vežimo). Perkirsim kūną plokšme E, statmena ašiai A; tada gautoji kirtime figura



brēž. 112

judēs savo plokšmēje, reiškia, duotasis sudētinis judējimas bus plokščias, kurs, kaip matēme, suvedamas į sukimasi kiekviename momente apie polį O, arba apie ašį O_1, statmeną plokšmei E. Išvesime toje plokšmēje per A tiesiają AO = l, statmeną C; josios galas O, dēliai sukimosi kampiniu greitumu ω, įgauna greitumą lω, nukreiptą žemyn, o dēliai plokšmes žengimo judējimo, kuriame dalyvauja visi jos taškai, - greitumą C aukštyn. Jeigu l paimti tokį, kad:

$$l\omega = C,$$

tai taško O galutinis greitumas bus nulis, vadinasi, taškas O bus polis, o normalē plokšmei E einanti per tašką O bus kūno sukimosi momentalinē ašis. Pažymēję per ψ ieškomą kūno sukimosi apie O kampinį greitumą, mes galime surasti ψ iš sąlygos, kad taško A sukantysis apie O greitumas būtų lygus tojo taško duotajam greitumui C, vadinasi

$$l\psi = C,$$

iš kur randame:

$$\psi = \frac{c}{l} = \omega.$$

Tokiu būdu, kūno sukimasis apie ašį A kampiniu ~~grei~~ greitumu ω ir to paties laiko kūno slinkimas statmenai A greitumu c susideda drauge į vieną sukimąsi apie ašį $O \parallel A$ su tuo pačiu kampiniu greitumu ω; ašys O ir A guli vienoje plokšmėje, statmenoje c; nuotolis tarp ašių A ir O yra

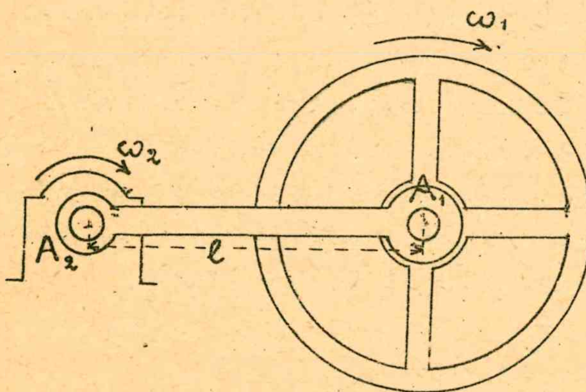
$$l = \frac{c}{\omega}.$$

Iš čia seka, kad atvirkščiai, sukimąsis apie O kampiniu greitumu ω gali būti išskiaidytas į sukimąsi apie ašį $A \parallel O$, nutolusią nuo O tarpu l, su tuo pačiu kampiniu greitumu ω ir į žengimą kryptimi statmena ašių O ir A plokšmei greitumu

$$c = l\omega.$$

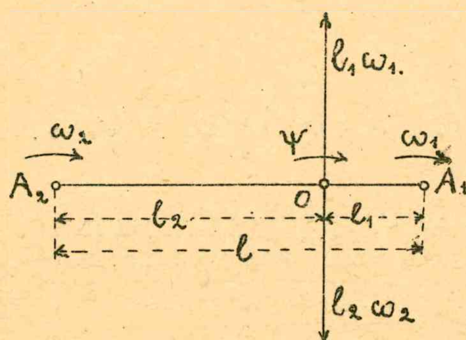
2. S u k i m ą s i s a p i e l y g i a g r e t e s a š i s.

Tegu kūnas (brėž. 113), pav. ratas sukasi apie ašį A_1 kampiniu greitumu ω_1 (skriejiko A_2A_1 ilgumo l atžvilgiu), kuris pats sukasi apie ašį A_2, lygiagrete A_1, kampiniu greitumu ω_2 (nejudamos atramos atžvilgiu). Ratas juda sudėtiniu judėjimu, kuris, būdamas plokščias, suvedamas į sukimąsi apie kai kurią



brėž. 113

momentaline ašį, atsižyminčią tuo, kad josios taškų greitumai lygūs nuliui. Jeigu ω_1 ir ω_2 yra vienos krypties, tai šitoji momentalinė ašis O guli abiejų ašių A_1 ir A_2 plokšmėje ir randasi tarp jų. Tikrai, paimkime rato tašką O (brėž. 114), gulinti linijoje A_1A_2 nuo taškų A_1 ir A_2 nuotoliuose l_1 ir l_2; tojo taško O greitumas yra abiejų sukimąsi išdava; deliai rato sukimosi apie A_1 taškas O gauna greitumą $l_1\omega_1$, nukreiptą aukštyn, del skriejiko sukimosi apie A_2 taškas gauna greitumą $l_2\omega_2$, nukreiptą žemyn; šitie greitumai vienas kitą naikina, vadinasi, taškas O bus momentalinis centras, jeigu



brēž. 114

$$l_1\omega_1 = l_2\omega_2,$$

arba jeigu

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Jeigu taškas O paimtas kur nors šalia tiesiosios A_1A_2, tai sudedamieji greitumai $l_1\omega_1$ ir $l_2\omega_2$ negalētų duoti atstojamąją lygią nuliui. Reiškia, momentalinės ašies O padētis rasta. Kad radus rato sukimosi apie tą ašį kampinį greitumą ψ, pastebēsime, kad ji (ašis) privalo būti tokia, kad rato taškas A_1 nuo sukimosi apie O su kampiniu greitumu ψ įgautų tą patį greitumą, kokį jis turējo tikrenybēje, besukdamas su skriejiku apie A_2,

vadinasi:

$$l\omega_2 = (l_1+l_2)\omega_2;$$

tokiu būdu turime sąlygą:

$$l_1\psi = (l_1+l_2)\omega_2;$$

iš kur

$$\psi = \frac{l_1+l_2}{l_1}\cdot\omega_2 = (1+\frac{l_2}{l_1})\omega_2 = (1+\frac{\omega_1}{\omega_2})\omega_2 = \omega_2+\omega_1.$$

Tokiu būdu, du to paties laiko sukimosi apie lygiagretes ašis A_1 ir A_2 sudedami kiekvienu momentu į sukimąsi apie ašį O, lygiagretę ašims A_1 ir A_2 ir gulinčią jų tarpe; momentalinės ašies nuo ašių A_1 ir A_2 nuotoliai yra atvirkščiai proporcingi sikimosi apie atatinkamas ašis greitumams; kūno sukimosi apie momentaline ašį O kampinis gre greitumas ψ lygus duotųjų dviejų sukimosi kampinių greitumų sumai.

Sukimų sudėtį galima daryti grafiniai, kuriam tai tikslui kampiniai greitumai reiškiami atkarpomis, atidedamomis išilgai sukimosi ašių, kurioms duodama vienos, kitos teigiamos krypties, žymimos rodikliu; atkarpa lygi ω atidedama išilgai ašies nuo tam tikro taško ton pusėn, kad žiūrėtojas, stovintis išilgai ašies rodiklio kryptimi, matytų teigiamą sukimąsi laikrodžio rodiklio kryptimi, o neigiamą - prieš laikrodžio rodiklį. Laikantis tų taisyklių kampiniai greitumai yra sudedami ir išskiaidomi visai taip pat, kaip ir jėgos. Nagrinėtame pavyzdyje atkarpos, lygios kampiniams greitumams ω_1 ir ω_2 turi būti atidėtos išilgai ašių A_1 ir A_2 į vieną puse (brėž. 115).

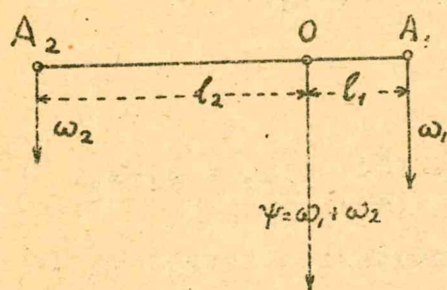
Jie susideda į vieną atstojamąjį kampinį greitumą

$$\psi = \omega_1 + \omega_2,$$

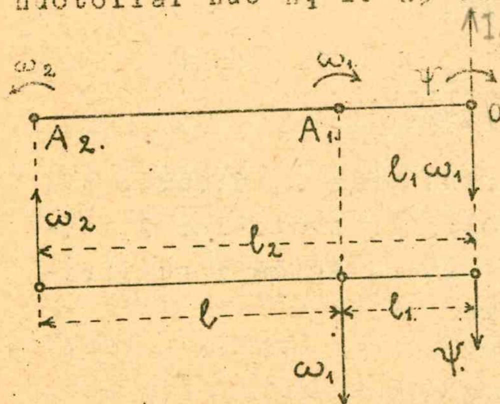
reiškiamą atkarpos, lygios dviejų duotųjų sumai, lygiagretės jiems ir gulinčios vienoje plokšmėje nuotoliuose l_1 ir l_2, atvirkščiai proporcinguose atatinkamoms atkarpoms ω_1 ir ω_2, vadinasi

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \text{arba} \quad l_1\omega_1 = l_2\omega_2.$$

Jeigu sukimosi ω_1 ir ω_2 kryptys lygiagretės, bet nukreiptos į priešingas puses (brėž. 116), tai momentalinė ašis A guli taipogi plokšmėje ašių A_1 ir A_2 ir yra joms lygiagretė, bet guli nebe jų tarpe, o anapus didesnio kampinio greitumo. Daleisime, kad $\omega_1 > \omega_2$ ir ieškosime dešinėje nuo A_1 kūne tokio taško O, kuris turi greitumą nulį; tegu šito taško nuotoliai nuo A_1 ir A_2 bus l_1 ir l_2; taip, jog $l_2 - l_1 = l$. Nuo sukimosi apie A_1 taškas O įgaus greitumą $l_1\omega_1$, nukreiptą žemyn; nuo sukimosi apie A_2 (drauge su alkūne) - greitumą $l_2\omega_2$ aukštyn; šitie greitumai vienas kitą panaikina ir



brėž. 115



brėž. 116

taškas O turēs galutinį greitumą nulis, vadinasi, bus momentalinis centras, jeigu

$$l_1\omega_1 = l_2\omega_2, \quad \text{arba} \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Sūkimosi apie momentaline ašį O kampinis greitumas ψ randamas iš sąlygos, kad kietojo kūno taškas A_1 turi greitumą

$$l\omega_2 = (l_2-l_1)\omega_2,$$

nukreiptą aukštyn; reiškia ψ turi būti vienos krypties su ω_1 ir turēti tokį didumą, kad

$$l_1\psi = l\omega_2 = (l_2-l_1)\omega_2,$$

iš kur:

$$\psi = \frac{l_2-l_1}{l_1}\omega_2 = \left(\frac{l_2}{l_1} -1\right)\omega_2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} -1\right)\omega_2 = \omega_1-\omega_2.$$

Tą patį rezultatą gausim, sudedami atkarpas ω_1 ir ω_2 lygiagrečių jēgų, nukreiptų į priešingas puses, sudēties taisykle. Iš lygybēs:

$$l_1\psi = l\omega_2$$

seka:

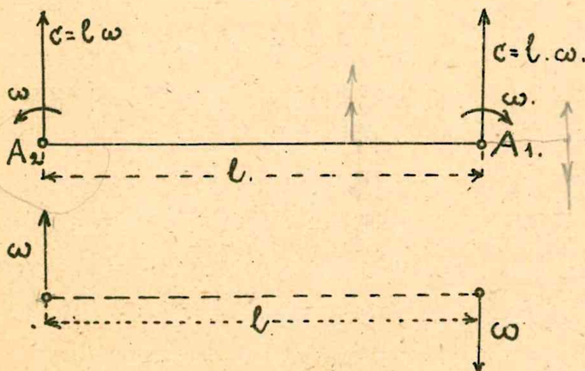
$$l_1 = \frac{\omega_2}{\psi}.l = \frac{\omega_2}{\omega_1-\omega_2}.l;$$

todel, jeigu ω_2 didumas artēs prie ω_1 didumo, tai momentalines ašies O nuotolis l_1 nuo ašies A_1 neribotai didēs, o dydis $\psi = \omega_1-\omega_2$ artēs į nulį; riboje, kada $\omega_1 = \omega_2$, gausime:

$$l_1=\infty \text{ ir } \psi = 0,$$

vadinasi, du lygūs ir priešingos krypties kampiniai greitumai apie lygiagretes ašis rezultate neduoda jokio sukimosi ir jokios momentalinės ašies baigtiniame nuotolyje (taip pat, kaip dvi lygios ir lygiagretės priešingos krypties jėgos neduoda jokios atstojamosios).

Dvi tokios lygios, lygiagretės ir priešingos pakraipos sukimosi ω ir ω atkarpos vadinamos sukimo poriu (analoginiai jėgų poriui). Kadangi sukimasis apie be galo tolimą ašį tolygus tiesiaeigiam judėjimui statmena ašiai kryptimi, tai visi kūno, sukamo sukimo porio taškai juda žengiamai su kai kuriuo bendru greitumu c, statmenu sukimo porio ašių plokšmei (brėž. 117). Greitumo c didumai lengvai gaunami ištyrus kietojo kūno taškų A_1 ir A_2 greitumus, kurie lygūs $c = l\omega$ ir nukreipti, duotam nuotikiui, aukštyn. Vadinasi, sukimo poris tolygus kūno žengiamajam judėjimui, statmenam sukimo porio plokšmei.



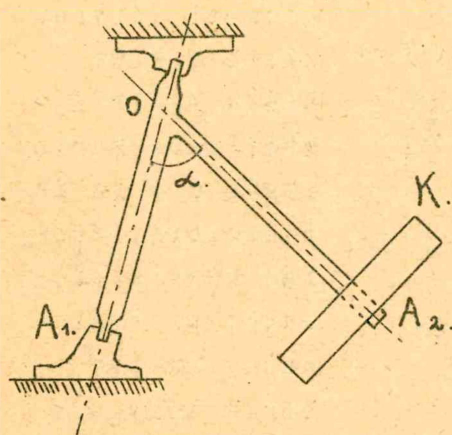
brėž. 117

Sandauga kampinio greitumo ω su nuotoliu l tarp sukimosi ašių vadinama sukimo porio momentu ir reiškia kūno žengiamojo judėjimo greitumo diduma $c = l\omega$. Kadangi visi kūno taškai turi vienodą žengiamąjį greitumą c ir pastarasis neturi erdvėje jokios apibrėžtos krypties, tai ir sukimo porio ašys neturi apibrėžtos padėties, bet gali būti, kaip ir jėgų poris, bet kuriuo būdu kilnoja-

mas savo plokšmēje ir jai lygiagretēse plokšmēse, o taipogi sulig noro pakeičiamos, mainant faktorius l ir ω, bet tik sukimų porio momentas būtų lygus duotajam greitumui $c = l\omega$ ir kad tik pasiliktų tojo greitumo c duotieji ženklas ir pakraipa. Atskirai gi paimtoji sukimosi atkarpa ω, kaip ir skyrium paimta jega, turi erdvēje pilnai apibrēžtą padētį. Kiekvienas kūno žengiamasis greitumas gali būti be galo daug būdų išreikštas sukimų porio pavidale.

3. Sukimasis apie susikertančias ašis.

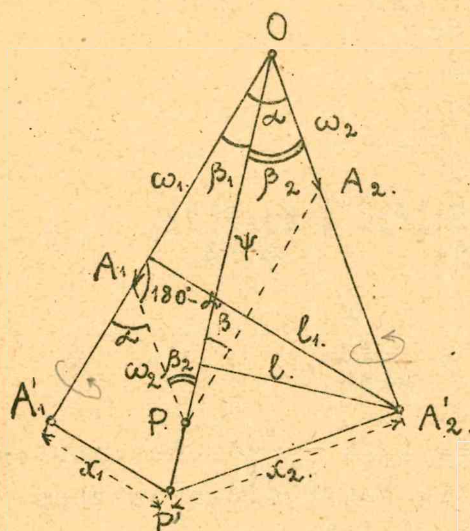
Tegu kūnas K (pav. ratas) sukasi apie ašį OA_2, kuri pati sukasi apie ašį OA_1 (brēž. 118); tada sakoma, kad kūnas K tuo pačiu laiku turi du sukimus: apie ašį OA_1 kampiniu greitumu ω_1 ir apie ašį OA_2 kampiniu greitumu ω_2; šitie kampiniai greitumai brēžinyje 119 parodyti kaipo atkarpos nuo sukimo ašių krypčių susikirtimo taško O.



brēž. 118

Jeigu taške O būtų koks nors kūno K taškas A, tai jis turētų greitumą nulis; todel į kūno judējimą galima žiūrēti, kaipo į sukimąsi apie tašką O, arba kaipo į sukimąsi apie kai kurią momentaline ašį OP, einančią per O. Reikia surasti ašies OP kryptį ir kūno sukimosi apie ją kampinį greitumą w, išeinant iš to, kad visi linijos OP taškai turi greitumus lygius nuliui. Jeigu daleisime, kad ašis OP guli plokšmēje A_1OA_2, tai pamatysime, kad koks nors ši-

tos ašies taškas P', priklausąs kūnui K, įgauna nuo sukimosi apie ašį OA_1 greitumą $x_1\omega_1$ nukreiptą žemyn, kame x_1 - taško P' nuotolis nuo ašies OA_1, o nuo sukimosi apie ašį OA_2 - greitumą $x_2\omega_2$, kur x_2 - nuotolis P' nuo OA_2, nukreiptą aukštyn (brėžinio plokšmės atžvilgiu); todel taško P' greitumas bus nulis, jeigu



brėž. 119

$$x_1\omega_1 = x_2\omega_2,$$

arba jeigu

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{OP'.\sin\beta_2}{OP'.\sin\beta_1} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \text{ arba } \frac{\omega_1}{\sin\beta_2} = \frac{\omega_2}{\sin\beta_1}.$$

Iš čia galima rasti kampus β_1 ir β_2, sudarytus momentalinės ašies OP su ašimis OA_1 ir OA_2, jeigu duotas kampas

$$A_1OA_2 = \alpha = \beta_1 + \beta_2.$$

Kūno K sukimosi apie momentaline ašį OP kampinis greitumas ψ randamas iš tos sąlygos, kad koks nors kūno taškas, pav. A'_2 turi tą patį sukimosi apie ašį OP greitumą $l\psi$, kurį jis turėtų nuo abiejų sudedamųjų sukimų, vadinasi, nuo sukimosi apie ašį OA_1, būtent: $l_1\omega_1$, kame l ir l_1 - taško A'_2 nuotoliai nuo ašių OP ir OA_1; tokiu būdu turime sąlygą:

$$l\psi = l_1\omega_1 \text{ arba } \frac{\psi}{\omega_1} = \frac{l_1}{l} = \frac{OA_2'.\sin(\beta_1+\beta_2)}{OA_2'.\sin\beta_2} =$$

$$= \frac{\sin(\beta_1+\beta_2)}{\sin\beta_2}.$$

Iš čia gauname:

$$\psi = \frac{\omega_1\sin(\beta_1+\beta_2)}{\sin\beta_2} = \frac{\omega_1.\sin\alpha}{\sin\beta_2},$$

arba:

$$\frac{\psi}{\sin\alpha} = \frac{\omega_1}{\sin\beta_2},$$

kas, kaip matēme, taipogi lygu $\frac{\omega_2}{\sin\beta_1}$. Bet pastarosios proporcijos reiškia pagrindines savybes tokio trikampio, kurio kraštinēs yra ω_1, ω_2 ir ψ, o prieš gulintieji jiems kampai yra β_2, β_1 ir α arba $180^\circ-\alpha$. Toki trikampi gausime, jeigu kampo A_1OA_2 šonuose pastatysime lygiagretaini, atidēję $OA_1 = \omega_1$, $OA_2 = \omega_2$ ir išvedę jo diagonalę $OP = \psi$. Trikampiai OA_1P ir OA_2P sudaryti dviejų kraštinių ω_1 ir ω_2, tarp kurių kampas yra $180^\circ-\alpha$; todel trečioji kraštinē OP yra ψ, o du likusieji kampai, pav. A_1OP ir A_1PO trikampyje A_1OP yra β_1 ir β_2, nes jie atatinka sąlygoms:

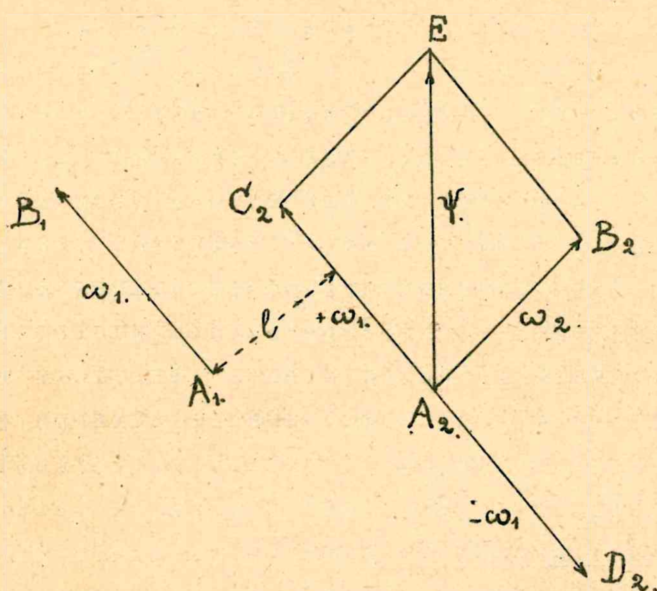
$$\frac{OP}{\sin\alpha} = \frac{\omega_1}{\sin A_1PO} = \frac{\omega_2}{\sin A_1OP}.$$

Šitoji proporcija atatinka žemiau nagrinētajai, iš ko sprendžiame, kad $OP = \psi$,

$$A_1PO = \beta_2,\ A_1OP = \beta_1.$$

Tokiu būdu, dei susikertančių sukimosi ašių nuotikio, sukančiųjų greitumų sudētis daroma tuo

pačiu lygiagretainio dēsniu, kaip ir susikertančių viename taške jēgų sudētis, vadinasi, du sukimai apie susikertančias ašis susideda į vieną sukimąsi (apie momentalinę ašį) kurio didumas ir kryptis lygus lygiagretainio, pastatyto iš sudedamųjų sukimų, diagonaliai. Galvojant taip, kaip apie jēgas, gausime lygiai tokias pat



brēž. 120.

teoremas apie kelių vienkartinių kūno sukimų apie kelias susikertančias viename taške ašis, sudētį (paralelepipedas, daugiakampis, arba geometrinē atkarpų, reiškiančių sukimus, suma).

4. Sukimai apie ašis, negulinčias vienoje plokšmēje. (brēž. 120.)

Tegu $A_1B_1 = \omega_1$ ir $A_2B_2 = \omega_2$ yra dvi nesusikertančios ir nelygiagretēs sukimų atkarpos; išvesim per A_2 dvi tarp savęs lygias ir priešingos pakraipos sukimų atkarpas A_2C_2 ir A_2D_2 lygias ir lygiagretes $A_1B_1 = \omega_1$; taip padaryti mes galime visumet, nes du tokie priešingos pakraipos sukimai vienas kitą panaikina. Atkarpos A_2B_2 ir A_2C_2 lygiagretainio taisykle sudedamos į vieną atstojamąjį sukimą $\psi = A_2E$; gi atkarpos A_1B_1 ir A_2D_2 sudaro sukimų

porį, kurio momentas $l.\omega_1$, kame l yra taško A_2 nuotolis nuo krypties A_1B_1; šitas sukimų poris tolygus kūno žengiamajam judėjimui greitumu $c = l.\omega_1$ statmenai plokšmei $B_1A_1A_2$. Reiškia, dvi duotosios ne susikertančios sukimų atkarpos ω_1 ir ω_2 susideda į vieną sukimąsi ψ ir žengimą greitumu c. Veikiant tuo pačiu būdu, galima sudėti kiek norint kūno sukimų atkarpų, duotų erdvėje, lygiai taip pat, kaip buvo elgtasi statikoje, sudedant jėgas, pridėtas į kūną bet kaip. Kaip ten jėgų sudėties rezultate gaunama apibrėžto didumo ir krypties atstojamoji R, pridėta į kaip norint parinktą kūno tašką A ir atstojamasis linijinis momentas $\mathfrak{M}$, taip ir čia sudėdami sukimų atkarpų eilę, gauname vieną atstojamąjį sukimą ψ, turintį apibrėžtą didumą ir kryptį, bet nevaržomą padėtį erdvėje, ir sukimų porį su momentu c, lygiu kūno žengiamajam greitumui. Čia irgi, kaip jėgose, atatinkamu lygiagrečiu atstojamojo sukimo ψ perkeilimu galima pasiekti to, kad kūno žengiamasis greitumas c bus mažiausias ir jo kryptis sutaps su atstojamojo sukimo ψ kryptimi, vadinasi gausis kūno sraigto judėjimas apie ašį ψ. Tokiu būdu kūno sraigto judėjimo ašis atatinka jėgų, veikiančių į kūną, sistēmos centralinei ašiai.

KIETOJO KŪNO, JUDANČIO APIE NEJUDAMĄ TAŠKĄ O, TAŠKŲ GREITUMŲ ANALITINIS SUVOKIMAS.

Kaip aukščiau matēme, kietojo kūno judējimas apie nejudamą tašką O, paimta koordinatų pradžia, judējimas gali būti apibrēžtas trimis Eilerio kampais θ, φ, ψ, duotais, kaipo laiko funkcijos:

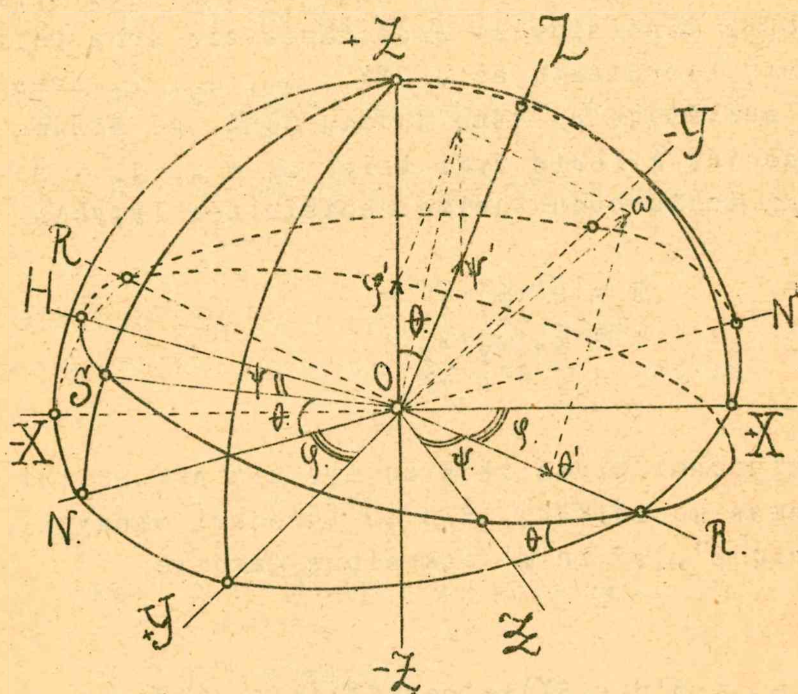
$$\theta = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t), \quad \psi = f_3(t).$$

Tų funkcijų išvestinės:

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = f_1'(t);\ \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} = f_2'(t);\ \psi' =$$

$$= \frac{d\psi}{dt} = f_3'(t)$$

reiškia kampinius greitumus tokių kūno sukimų, kurie iššaukiami kiekvieno iš trijų Eilerio kampų pasikeitimų skyrium. Pastebėsim, kad jeigu tiesioji judėdama aprašo kampą kai kurioje plokšmėje, tai ji sukasi apie ašį, statmeną tai plokšmei. Todel, jeigu mainosi plokšmių XOY ir ЗOH palinkimo kampas θ (brėž. 121), nesikeičiant kampams φ ir ψ, tai statmuo Oζ plokšmei ЗOH juda pastovioje plokšmėje



brėž. 121

ZOS, statmenoje mazgų linijai OR. Todel kampinis greitumas θ' turi būti atidėtas mazgų linijoje OR; mainantis vienam tik kampui φ, kampinis grei-

tumas φ' turi būti atidētas išilgai ašies OZ, gi keičiantis tik vienam kampui ψ, kampinį greitumą ψ' reikia atidēti išilgai ašies $O\zeta$. Kampinių greitumų sudēties taisyklė, kietojo kūno tikrasis kampinis greitumas ω duotame momente surandamas didumu ir kryptimi, kaipo paralelepipedo diagonalē, pastatyto iš kampinių greitumų θ', φ' ir ψ', atatinkamai atidētų išilgai ašių OR, OZ ir $O\zeta$:

$$\bar{\omega} = \bar{\theta}' + \bar{\varphi}' + \bar{\psi}'.$$

Tokiu būdu, kampinio greitumo ω didumas ir kryptis bus žinomi kiekvienam laiko momentui, jeigu duoti θ, φ ir ψ, kaipo laiko funkcijos.

Kūno sukimosi kampinis greitumas ω savo eilēje gali būti išsklaidytas sudedamaisiais arba išilgai nejudamų koordinatų ašių OXYZ: ω_x, ω_y, ω_z arba išilgai surištųjų su kūnu judamų $O\xi H\zeta$, gi šituos sudedamuosius Eileris žymi taip: $\omega_\xi = p$, $\omega_\eta = q$, $\omega_\zeta = r$; tokiu būdu turime geometrines lygybes:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{\theta}' + \bar{\varphi}' + \bar{\psi}' = \\ &= \bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y + \bar{\omega}_z = \\ &= \bar{p} + \bar{q} + \bar{r}. \end{aligned}$$

Projektuodami pirmą iš šitų lygybių nuosekliai į nejudamas koordinatų ašis ir turēdami omenyje vektorių θ', φ' ir ψ' pakraipas, gauname:

$$\omega_x = \theta'\cos(RX) + \varphi'\cos(ZX) + \psi'\cos(\zeta X)$$

$$\omega_y = \theta'\cos(RY) + \varphi'\cos(ZY) + \psi'\cos(\zeta Y)$$

$$\omega_z = \theta'\cos(RZ) + \varphi'\cos(ZZ) + \psi'\cos(\zeta Z)$$

Pasinaudoje brēžiniu 121 ir reiškiniams kosinusams išvestiems pusl. 115 randame:

$$\omega_x = \theta'.\cos\varphi+\psi'.\sin\theta.\sin\varphi$$

$$\omega_y = \theta'.\sin\varphi-\psi'\sin\theta.\cos\varphi$$

$$\omega_z = \varphi' + \psi'.\cos\theta.$$

Projektuodami tą pačią pirmąją lygybe į surištąsias su kūnu ašis $O\Xi H\zeta$, turime:

$$\omega_\xi = p = \theta'\cos(R\Xi)+\varphi'\cos(Z\Xi)+\psi'\cos(\zeta\Xi)$$

$$\omega_\eta = q = \theta'\cos(RH)+\varphi'\cos(ZH)+\psi'\cos(\zeta H)$$

$$\omega_\zeta = r = \theta'\cos(R\zeta)+\varphi'\cos(Z\zeta)+\psi'\cos(\zeta\zeta).$$

Pasinaudoję brēžiniu 121 ir išvestaislais puslapyje 115 reiškiniais del kosinusų, randame:

$$\omega_\xi = p = \theta'\cos\psi+\varphi'.\sin\theta.\sin\psi$$

$$\omega_\eta = q = -\theta'.\sin\psi+\varphi'.\sin\theta.\cos\psi$$

$$\omega_\zeta = r = \varphi'\cos\theta+\psi'.$$

Šitos formulos vadinamos *Eilerio formulomis kampiniams greitumams*.

ANALITINIS AKSOIDŲ SURADIMAS.

Kiekvienas taškas, gulintis momentalinėje kieto kūno sukimosi ašyje, sutampančioje su vektoriu ω, turi koordinatas proporcingas to vektorio sudedamiesiems išilgai koordinatų ašių. Todel, jeigu tokio taško absoliutinės koordinatos yra x, y, z ir reliatyvios - ξ, η, ζ, tai turime:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}$$

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}.$$

Jeigu kūno judėjimas mums duotas žinomų funkcijų pavidale:

$$\theta = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t), \quad \psi = f_3(t),$$

tai vardikliai pastarosiose formulose bus irgi žinomos laiko funkcijos. Prašalindami laiką iš pirmosios lygčių poros, gauname rezultate priklausomybe:

$$F_1\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

reiškiančią geometrinės taškų vietos lygtis, gulinčių momentalinėje sukimosi ašyje nejudamos koordinatų sistėmos atžvilgiu, vadinasi, nejudamo aksoido lygtis. Jeigu prašalinsime laiką iš antrosios projekcijų poros, tai gausime lygtis:

$$\Phi\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right) = 0$$

reiškiančias taškų geometrine vietą, gulinčių momentalinėje ašyje judamos koordinatų sistēmos atžvilgiu, reiškia, judamojo aksoido lygtis.

EILERIO FORMULOS KIETOJO KŪNO, BESISUKANČIO APIE NEJUDAMĄ TAŠKĄ O, TAŠKŲ GREITUMAMS.

Kieto kūno, turinčio nejudamą tašką O, duotojo taško $M(x,y,z)$ ar $M(\xi,\eta,\zeta)$ greitumas v yra sukantysis apie momentaline ašį ω, einančią per O, ir lygus $r\omega$, kame r - taško M nuotolis nuo ašies ω. Kuno judējimas duotas funkcijomis:

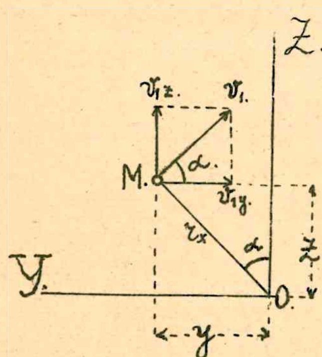
$$\theta = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t), \quad \psi = f_3(t).$$

Reikia surasti kieto kūno taško, turinčio reliatyvias koordinatas ξ,η,ζ, pastovias duotajam kūno taškui, arba absoliutines x,y,z, - besimainančias laikui bēgant tam pačiam pastoviam kūno taškui, greitumo v sudedamuosius išilgai koordinatų ašių (nejudamų OXYZ ar judamų $O\xi H\zeta$). Kūno sukimosi kampinis greitumas ω gali būti išsklaidytas trimis sukimo greitumais ω_x, ω_y, ω_z apie koordinatų ašis OX, OY, OZ, tai reiškia, kad kiekvieno kūno taško sukantysis greitumas v gali būti manomas sudarytu iš trijų sukančiųjų greitumų v_1, v_2, v_3 apie ašis OX, OY, OZ kampiniu greitumu ω_x, ω_y, ω_z, vadinasi:

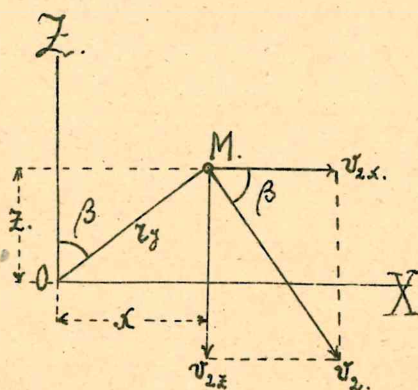
$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3.$$

Projektuodami šitą geometrine lygybe į koordinatų ašis OX, OY, OZ, gausime ieškomus reiškinius grei-

tumo v sudedamiesiems v_x, v_y, v_z išilgai koordinatų ašių OXYZ. Sukantysis greitumas v_1 apie ašį OX yra lygiagretus plokšmei YOZ (brėž. 122) ir lygus



brėž. 122



brėž. 123

$r_x\omega_x$, kame r_x - taško M nuotolis nuo ašies OX. Greitumo v_1 projekcijos į koordinatų ašis OX, OY, OZ yra:

$$v_{1x} = 0; \; v_{1y} = -r_x\omega_x.\cos\alpha = -\omega_x z; \; v_{1z} = r_x\omega_x \sin\alpha =$$

$$= \omega_x y.$$

Sukantysis apie ašį OY greitumas v_2 yra lygiagretus plokšmei XZ (brėž. 123) ir lygus $r_y\omega_y$. Jo projekcijos į koordinatų ašis yra:

$$v_{2x} = r_y\omega_y.\cos\beta = \omega_y z; \; v_{2y} = 0; \; v_{2z} = -r\omega_y \sin\beta =$$

$$= -\omega_y.x.$$

Sukantysis apie ašį OZ greitumas v_3 lygiagretus plokšmei XY (brėž. 124) ir lygus $r_z\omega_z$; jo projekcijos į koordinatų ašis yra:

$$v_{3x} = -r_z\omega_z\cos\gamma = -\omega_z y; \; v_{3y} = r_z\omega_z\sin\gamma = \omega_z x; \; v_{3z} = 0.$$

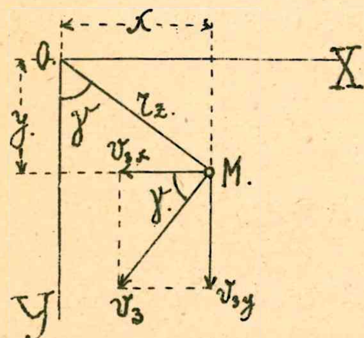
Tokiu būdu mes gauname:

$$v_x = v_{1x}+v_{2x}+v_{3x} = \omega_y z-\omega_z y$$

$$v_y = v_{1y}+v_{2y}+v_{3y} = \omega_z x-\omega_x z$$

$$v_z = v_{1z}+v_{2z}+v_{3z} = \omega_x y-\omega_y x$$

Išsklaide kūno taško M sukantįjį greitumą v trimis sudedamaisiais sukančiais greitumais v_I, v_{II}, v_{III} apie surištas su kūnu judamasias ašis $O\Xi$, OH, $O\zeta$, rasime:



brėž. 124

$$\bar{v} = \bar{v}_I+\bar{v}_{II}+\bar{v}_{III}.$$

Suradę sudedamuosius greitumus v_I, v_{II} ir v_{III} išilgai judamų ašių $O\Xi$, OH, $O\zeta$ ir projektuodami į šitas ašis paskutinę geometrinę lygybę, rasime pilnai analogines formulas greitumo v sudedamiesiems v_ξ, v_η, v_ζ išilgai judamų ašių $O\Xi$, OH, $O\zeta$:

$$v_\xi = \omega_\eta \zeta-\omega_\zeta \eta = q\zeta - r\eta$$

$$v_\eta = \omega_\zeta \xi-\omega_\xi \zeta = r\xi - p\zeta$$

$$v_\zeta = \omega_\xi \eta-\omega_\eta \xi = p\eta - q\xi$$

Čia koordinatos ξ, η, ζ yra pastovios kūno duota-

jam taškui M, p, q ir r - laiko funkcijos. Šitos dvi formulų grupės vadinamos E i l e r i o f o r m u l o m i s k ū n o l i n i j i n i a m s g r e i t u m a m s, todėl, kad jos duoda galimybės kiekvienam kūno taškui, duotam jo koordinatomis ir kiekvienam laiko momentui rasti to taško greitumo didumą ir kryptį, jeigu kūno judėjimas duotas kampais θ, φ ir ψ, kaipo laiko funkcijomis

Jeigu kūno sukimosi centras O turi savąjį judėjimą erdvėje, išreikštą lygtimis:

$$x_o = F_1(t),\ y_o = F_2(t),\ z_o = F_3(t),$$

vadinasi, jeigu kūnas turi be sukimosi dar ir žengimo judėjimą, tai pavadinę taško O žengimo greitumo sudedamuosius:

$$v_{ox} = F_1'(t),\ v_{oy} = F_2'(t),\ v_{oz} = F_3'(t),$$

rasime sekančius reiškinius kūno kokio nors taško M su reliatyviomis koordinatomis ξ, η, ζ absoliutinio greitumo v sudedamiesiems:

$$v_x = v_{ox}+v_\xi\cos\alpha_1+v_\eta\cos\alpha_2+v_\zeta\cos\alpha_3$$

$$v_y = v_{oy}+v_\xi\cos\beta_1+v_\eta\cos\beta_2+v_\zeta\cos\beta_3$$

$$v_z = v_{oz}+v_\xi\cos\gamma_1+v_\eta\cos\gamma_2+v_\zeta\cos\gamma_3$$

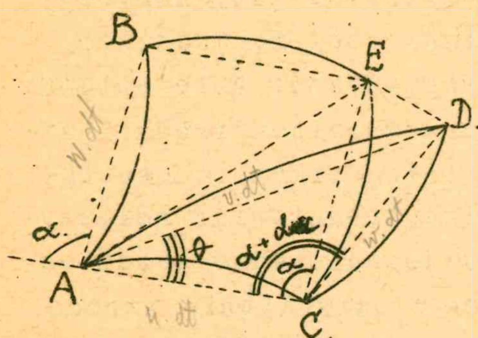
Pastatę čia aukščiau išvestąsias formulas dėl v_ξ, v_η, v_ζ ir kampų kosinusams, gausime kūno taško M absoliutinio greitumo v sudedamuosius, kaipo laiko funkcijas.

TAŠKO JUDĖJIMAS JUDANČIA TRAEKTORIJA.

Kada taškas juda traektorija, kuri turi žengimo judėjimą, tai, kaip jau matėme, jo judėjimas, o taipogi greitumas ir jo kryptis randami lygiagretainio, pastatyto iš tų pačių reliatyvaus ir transliacijos (kilnojamo) judėjimų elementų.

Rezultatas kiek keičiasi, jeigu traektorijos transliacinis judėjimas nebus grynas žengimo judėjimas, bet drauge su tuo ir sukimąsis.

Tegu per laiką dt taškas išeina judančia traektorija kelio elementą AB, kuris pats tuo tarpu ateina į padėjimą CD ir be žengimo judėjimo kelio elementu AC dar elementariniai pasisuka apie ašį, einančią per tašką C. Jeigu w yra taško reliatyvaus judėjimo traektorija greitumas, u - traektorijos elemento AB pradžios taško A transliacijos judėjimo greitumas, v - taško absoliutinio judėjimo iš A į D greitumas, tai, išvede stygas AB, AC ir AD, gauname:



brėž. 125

$$AB = w.dt,\ AC = u.dt,\ AD = v.dt.$$

Deliai traektorijos elemento sukimosi kampas ACE=α tarp stygų AB ar CE ir AC pasikeičia kampu ACD = = α+dα (kampai ACE ir ACD bendrai neguli vienoje plokšmėje). Todel iš trikampio ADC randame sutrumpine iš $(dt)^2$:

$$v = \sqrt{u^2+w^2-2uw\cos(\alpha+d\alpha)};$$

bet $$\cos(\alpha+d\alpha) = \cos\alpha,$$

reiškia $$v = \sqrt{u^2+w^2-2uw\cos\alpha};$$

del taško absoliutinio greitumo krypties turime sąlygą:

$$\frac{\sin\theta}{w} = \frac{\sin(\alpha+d\alpha)}{v} = \frac{\sin\alpha}{v},$$

arba $$\sin\theta = \sin\alpha \frac{w}{v}.$$

Kaip matome, formulos gautos tokios pat, kokios gautusi del gryno traektorijos žengimo judējimo, jeigu taško padētis laiko elemento dt gale būtų E. Vadinasi, koks tik nebūtų traektorijos transliacijos judējimas, judančio ja taško tikrasis greitumas v yra geometrinē judējimo traektorija reliatyvaus greitumo w ir traektorijos elemento pradžios taško transliacijos greitumo u suma. Kitaip atrodo sudētinio judējimo greitējimo dalykai. Tokio judējimo greitējimo formulos išvedimui pasinaudosim deviącijos (atsilenkimo) supratimu. Daleisime, kad taško sudētinis judējimas vyksta be greitējimo judančia traektorija, vadinasi, yra tolyginis ir tiesiaeigis; tada (brēž. 126) per laiko elementą dt taškas išeitų traektorijos tiesų elementą AB_1, o pats elementas nuslinktų tiesiuoju keliu AC_1 iki padēties C_1E_1, taip, jog taško galūtinas padējimas būtų E_1, o tikrasai kelias - tiesioji AE_1. Jeigu reliatyvus ir transliacinis judējimai vyksta su greitējimais p_1 ir p_2, turēdami taške A tuos pačius abiejų judējimų pradžios greitumus w ir u, kaip ir pirmame atsitikime, tai tų greitējimų di-

dumo ir krypties matu gali būti: deviacija, arba atsilenkimas

$$B_1B = \frac{p_1(dt)^2}{2}$$

del taško reliatyvaus judējimo traektorija AB_1 ir traektorijos elemento AB pradžios taško transliacijos judējimo deviacija

$$C_1C = \frac{p_2(dt)^2}{2}.$$

Tame atsitikime, jeigu traektorijos transliacijos judējimas yra žengiamasis, be sukimosi, tai taško galūtinē padētis E gausis, jeigu per C išvesime elementą $CE \# AB$, o taško tikrasis kelias bus kreivoji AE, liečiamoji tiesiajai AE_1 taške A.

Taško absoliutinio greitējimo p matu bus deviacija

$$E_1E = \frac{p(dt)^2}{2}$$

Išvesime per C liniją

$$CF \# AB_1 \# C_1E_1;$$

tada $\quad FE \# B_1B \quad$ ir $\quad E_1F \# C_1C,$

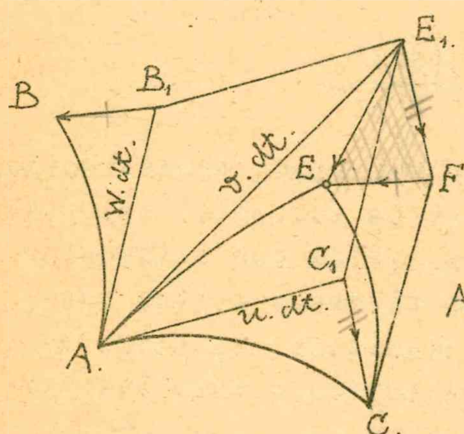
iš kur seka, kad:

$$\overline{E_1E} = \overline{E_1F} + \overline{FE},$$

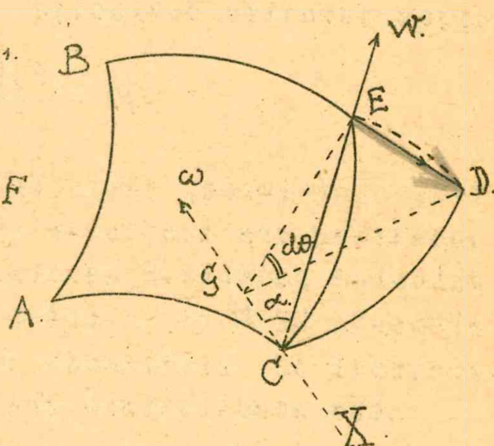
vadinasi

$$\overline{p} = \overline{p_1} + \overline{p_2}.$$

Tokiu būdu mes turime aukščiau padarytosios išvados patvirtinimą, kad jeigu traektorijos transliacijos judėjimas yra grynai žengimo, tai taško, judančio tąja traektorija tikrasis, arba absoliutinis greitėjimas yra geometrinė taško judėjimo traektorija reliatyvaus greitėjimo ir traektorijos



brėž. 126



brėž. 127

žengimo judėjimo greitėjimo suma.

Judančios traektorijos elemento sukimosi pasekmė yra taško galūtinės padėties persikelimas iš E į D (brėž. 127), į kurį galima žiūrėti, kaip į taško deviaciją, arba atsilenkimą nuo jo padėties traektorijai judant žengimo judėjimu, o pačią deviaciją skaityti kai kurio dapildančio, taško jaučiamo, greitėjimo p_3 pasekme, taip, jog: deviacija

$$ED = \frac{p_3(dt)^2}{2}.$$

Jeigu CX yra momentalinės ašies padėtis, apie kurią pasisuka traektorijos elementas CE, kad užėmus galūtinę padėtį CD, tai nuleidę iš E į ašį CX statmenį EG ir pavadinę $d\theta$ kampą EGD, turime:

$$ED = EG.d\theta.$$

Jeigu ω yra traektorijos elemento CE sukimosi apie momentalinę ašį CX kampinis greitumas, α - kampas, sudarytas ašies CX su elemento CE = Wdt kryptimi, arba su taško reliatyviu greitumu W savo traektorija, tai randame:

$$EG = CE.\sin\alpha = W.dt.\sin\alpha; \quad d\theta = \omega.dt;$$

todėl: deviacija

$$ED = \frac{p_3(dt)^2}{2} = W.dt.\sin\alpha.\omega.dt,$$

iš kur

$$p_3 = 2W.\omega.\sin\alpha.$$

Kadangi deviacija ED, judančios traektorijos elemento sukimosi pasėkmė, prisideda prie aukščiau rastųjų deviacijų B_1B ir C_1C (brėž. 126), tai bendroji deviacija, arba taško atsilenkimas nuo tiesiaeigio, tolyginio judėjimo bus geometrinė deviacijų B_1B, C_1C ir ED suma; deliai to ir taško bendrasis arba tikrasis ar absoliutinis greitėjimas p bus geometrinė trijų greitėjimų p_1, p_2 ir p_3 suma, būtent:

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3.$$

Greitėjimas p_3 vadinamas pasukamuoju greitėjimu, arba Koriolїso greitėjimu.

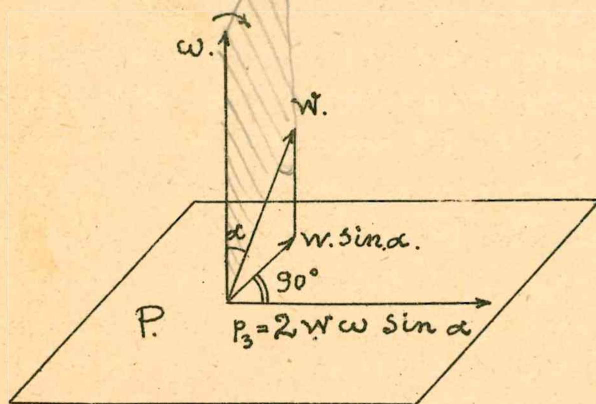
Iš čia sekančioji teorema: taško, judančio judama traektorija tikrasis (absoliutinis) greitėjimas p yra trijų greitėjimų geometrinė suma:

1) taško reliatyvaus judėjimo traektorija greitėjimo p_1; 2) judamos traektorijos elemento AB pradžios taško A transliacijos judėjimo greitėjimo p_2; 3) pasukamojo (Koriolišo) greitėjimo

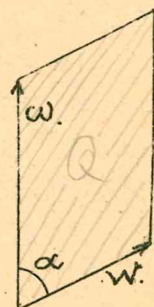
$$p_3 = 2W.\omega.\sin\alpha,$$

kame W - taško reliatyvaus judėjimo traektorija greitumas; ω - traektorijos elemento AB sukimosi apie momentaline ašį kampinis greitumas, α - kampas tarp reliatyvaus greitumo W ir elemento sukimosi momentalinės ašies; kryptis p_3 - statmena plokšmei, einančiai per W ir ω ir nukreipta ton pusėn, kurion sukasi traektorijos elemento AB galas B besisukant apie momentaline ašį ω.

Kadangi W.sinα yra taško reliatyvaus greitumo projekcija į plokšme, statmeną momentalinei sukimosi ašiai ω, tai pasukamojo greitėjimo didumo ir krypties taisykle galima formuluoti šiaip: (brėž. 128): Išveskime plokšmę P, statmeną



brėž. 128

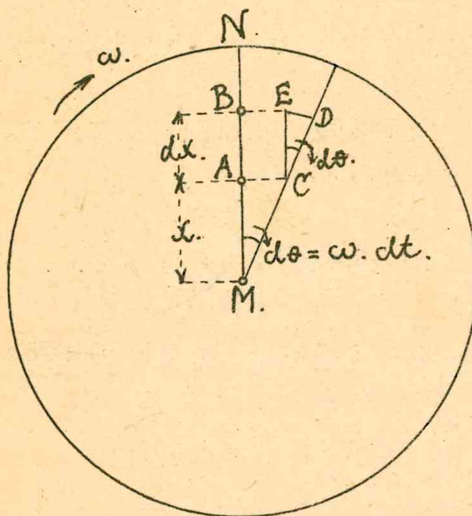


brėž. 129

momentalinei ašiai ω ir rasime joje reliatyvaus greitumo W projekciją W.sinα; padauginkime šitą projekciją iš 2ω ir pasukime gautąjį vektorį

$2w\omega\sin\alpha$ plokšmėje P sukimosi ω pusėn kampu 90°; gausime vektorio galutinį padėjimą, duodantį pasukamąjį greitėjimą $p_3 = 2w.\omega.\sin\alpha$. Pastebėsime dar, kad dydis p_3 reiškia lygiagretainio, pastatyto iš vektorių w ir ω, kaipo kraštinių, dvigubą plotą (brėž. 129).

Pavyzdžiai. 1. Išilgai gulsčio disko tolygiai besisukančio laikrodžio rodiklio kryptimi kampiniu greitumu ω, spindulio MN (brėž. 130) juda taškas M pastoviu greitumu w nuo centro M į apskritimą. Reikia rasti taško, esančio vietoje A, esančio nuo disko centro nuotolyje x, greitumą v ir greitėjimą p. Tegu AB = = dx yra taško reliatyvios traektorijos elementas. Jo pradžios taškas A turi sukantį dešinėn greitumą $x\omega$ (brėž. 131), kurį sudėje su w, nukreiptu aukštyn, gausime taško absoliutinį greitumą v, sudarantį su spinduliu kampą γ, o

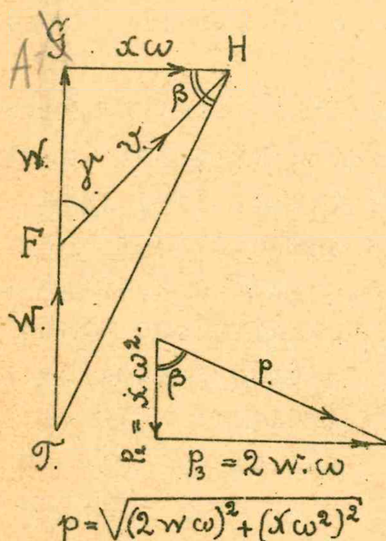


brėž. 130

$$tg\gamma = \frac{x\omega}{w}.$$

Taško pilnojo greitėjimo p sudedamieji yra: $p_1 = 0$, nes w = const.; p_2 yra traektorijos elemento taško A, judančio apskritimu spindulio x su kampiniu greitumu ω, judėjimo greitėjimas, vadinasi p'_2 yra įcentrinis greitėjimas $x\omega^2$, nukreiptas į disko.

centrą; pasukamasis greitėjimas $p_3 = 2w.\omega$, nes kampas α tarp w ir disko sukimosi ašies ω yra 90°; kryptis p_3 sutampa su traektorijos elemento AB deviacija ED, jam pereinant iš padėties CE||AB (elemento žengiamasis persislenkimas) į galūtine padėtį CD, vadinasi, p_3 nukreiptas statmenai spinduliui MN, dešinėn; pilnasis greitėjimas



brėž. 131

$$\bar{p} = \bar{p}_2 + \bar{p}_3$$

sudaro su spinduliu kampą β, kuriam:

$$tg\beta = \frac{2w.\omega}{x\omega^2} = \frac{2w}{x\omega}.$$

Greitumų diagramoje pratesę liniją GF ir atidėję joje FT = w, rasime:

$$tgTHG = \frac{2w}{x\omega} = tg\beta,$$

vadinasi, $p \perp HT$ ir su taško greitumu v sudaro smailą kampą; todel v auga didėjant x-ui.

2) Surasti taško, judančio tolyginiai meridianu nuo šiaurės polio P į ekvatorių (brėž. 132) greitumu w pilnojo greitėjimo sudedamuosius; žemės sukimosi kampinis greitumas yra ω. Jeigu taškas duotame momente randasi A, tai kampas α tarp jo reliatyvaus greitumo w išilgai meridiano ir pastarojo sukimosi ašies (žemės ašies, gi vektoris ω nukreiptas žemyn, nes žemės paros sukimąsis vyksta prieš laikrodžio rodiklį) lygus kampui ACE, arba vietos

platumui A. Taško reliatyvaus judėjimo meridianu greitėjimas yra:

$$p_1 = \frac{w^2}{r}$$

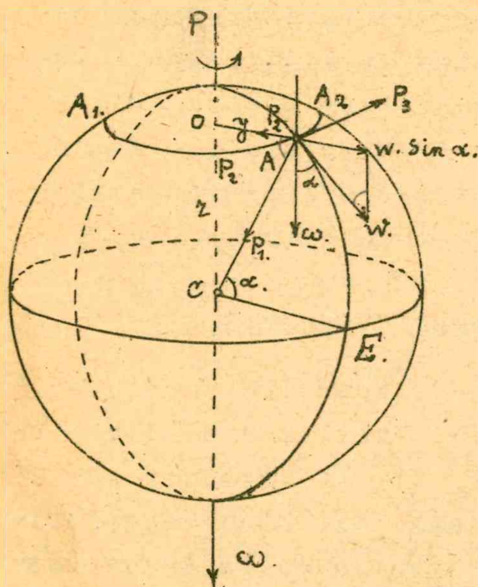
ir nukreiptas išilgai AC į žemės centrą C (r - žemės spindulys). Meridiano taško A transliacijos judėjimo paralele A_1AA_2 spindulio $y = r.\cos\alpha$ greitėjimas p_2 yra:

$$p_2 = y\omega^2 = r\cos\alpha.\omega^2$$

ir nukreiptas išilgai AO į paralelės centrą O. Pasukamasis greitėjimas

$$p_3 = 2w.\omega.\sin\alpha$$

nukreiptas statmenai meridiano plokšmei (turinčiai savyje w ir ω). Kad ištyrus katron pusėn nukreiptas p_3, projektuojame w į paralelės plokšme, gauname $w\sin\alpha$, nukreiptą paralelės spindulio AO pratęsimu; pasuke šitą vektorį prieš laikrodžio rodiklį 90°, gausime tikrąją p_3 kryptį - į rytus. Taško pilnasis greitėjimas p bus paralelepipedo, turinčio briaunomis p_1, p_2 ir p_3, diagonalė. Jeigu taškas judėtų išilgai meridiano nuo pusiaujo į šiaurės polį, tai pasukamasis greitėjimas būtų nukreiptas priešingon pusėn, vadinasi, į



brėž. 132

vakarus; abiejuose atsitikimuose jis nukreiptas kairēn nuo žiūrētojo, žiūrinčio iš taško A greitumo w kryptimi. Jeigu tokiu būdu išilgai meridiano juda sunkusis taškas arba kūnas masēs m, tai greitējimai p_1 ir p_2 yra sudaromi veikiančiųjų į jį svorio jēgų ir žemēs paviršiaus normalinēs reakcijos; pasukamasis gi greitējimas p_3 turi būti iššauktas kelio, kuriuo juda sunkusis kūnas, šoninių reakcijų, kurios visumet yra nukreiptos kairēn, skaitant nuo greitumo w krypties; sulig gi akcijos ir reakcijos lygybēs dēsnio judantis sunkusis kūnas savo inercija reaguoja į kelio dešinįjį šoną su jēga, lygia $-mp_3$; nuo to pareina dešiniojo upēs kranto išplovimas, gelžkeliuose su dvejais bēgiais didēsnis dešiniojo, negu kairiojo bēgio sudēvējimas ir kiti panašūs apsireiškimai. Pietų žemēs pusrutuly labiau griaunasi kairysis upēs krantas ir kairysis gelžkelio bēgis del pasukamojo greitējimo priešingos krypties.

RELIATYVUS (MATOMAS) JUDĒJIMAS.

Jeigu kūnas kaip nors juda koordinatų ašių $O\xi$, $O\eta$ ir $O\zeta$ sistēmos atžvilgiu, kuri savo eilēje, irgi juda koordinatų ašių AX, AY, AZ sistēmos atžvilgiu, kuri manoma nejudama, tai kūno absoliutinis judējimas bus sudētinis iš jo reliatyvaus (matomo) judējimo sistēmoje $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ ir iš sistēmos $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ transliacijos judējimo sistēmoje AX, AY, AZ. Kaip aukščiau matēme, kiekvienas kūno judējimas duotame laiko elemente dt suvedamas į kai kurį sraigto judējimą, vadinasi, į elementarinį pasisukimą kampu $\omega.dt$ apie momentaline ašį ω ir į elementarinį žengimą $c.dt$ tos pačios ašies kryptimi,

gi pastarasis gali būti skaitomas elementarinių sukimu apie dvi lygiagretes ašis, kurių plokšmē statmena ω, poriu su momentu $l.\psi = c$. Pažymēsime kūno elementarinį sraigto judējimą sistēmos $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ atžvilgiu per $B_{rel.}$ Panašiu būdu sistēmos $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ transliacijos elementarinį judējimą sistēmoje AX, AY, AZ tame pačiame laiko elemente dt galima išreikšti, kaipo elementarinį sraigto judējimą apie kai kurią kitą momentaline ašį. Pažymēsime jį $B_{transl.}$. Sudēje du sraigto elementarinius judējimus $B_{rel.}$ ir $B_{transl.}$ aukščiau nurodytomis taisyklēmis, rasime kūno absoliutinį elementarinį judējimą, kuris taipgi suvedamas į kai kurį sraigto judējimą, kurį pavadinsime $B_{abs.}$. Todel, įvesdami paprastąjį geometrinēs judējimų sudēties paženklinimą, galime parašyti:

$$\overline{B_{abs.}} = \overline{B_{rel.}} + \overline{B_{transl.}}$$

ir šitą reiškinį pasakyti žodžiais šiaip: kūno absoliutinis elementarinis judējimas yra geometrinē suma kūno reliatyvaus elementarinio judējimo judamoje sistēmoje $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ ir pačios sistēmos $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ transliacijos elementarinio judējimo nejudamoje sistēmoje AX, AY, AZ. Iš aukščiau parašytosios geometrinēs lygybēs gauname, pridēje prie jos abiejų pusių po lygų elementarinį judējimą $- B_{transl.}$ (vadinasi, po sraigto elementarinį judējimą $B_{transl.}$, tik priešingos pakraipos):

$$\overline{B_{abs.}} - \overline{B_{transl.}} = \overline{B_{reliat.}}$$

Tokiu būdu gauname teoremą:

Jeigu žinomas kūno absoliutinis judējimas, tai kad gauti jo matomą, arba reliatyvų judējimą, ko-

kios nors judamos sistēmos atžvilgiu, reikia prie kūno absoliutinio judējimo geometriniai pridēti sistēmos transliacijos judējimą, paimtą su priešingu ženklu, vadinasi transliacijos žengimo ir sukimosi kryptis pakeičiant priešingomis.

DVIEJŲ JUDANČIŲ TAŠKŲ RELIATYVUS JUDĒJIMAS.

Tegu vieno taško P judējimas išreiškiamas jo absoliutinių koordinatų x, y, z, kaipo žinomų laiko funkcijų, antro taško P_1 judējimas - jo koordinatomis x_1, y_1, z_1 nejudamos koordinatų sistēmos AX, AY, AZ atžvilgiu. Kad gavus taško P reliatyvų judējimą taško P_1 atžvilgiu, reikia įsivaizdinti sau judamą sistēmą $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, nepakeičiamai surištą su pastaruoju tašku, o kadangi šitas taškas juda nesisukdamas, tai ir judamos sistēmos judējimas turi būti žengimo; todel paimsime tašką P_1 judamos sistēmos pradžia O ir išvesime per jį ašis $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, atatinkamai lygiagretes nejudamos sistēmos ašims AX, AY, AZ. Taško P judējimas šitos sistēmos $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ atžvilgiu ir bus ieškomasis taško P matomas arba reliatyvus judējimas taško P_1 atžvilgiu; jis gaunamas kaipo geometrinē taško P absoliutinio judējimo ir judējimo, atbulo taško P_1 žengimo judējimui suma. Šita išvada tinka kaip elementariniams, taip ir baigtiniams abiejų taškų persislenkimams, o taipogi jų greitumams ir greitējimams. Pasukamojo greitējimo čia nēra, nes judamos sistēmos $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ transliacijos judējimas yra žengimo, todel $\omega = 0$. Jeigu taško P reliatyvias koordinatas sistēmos $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, surištos su tašku P_1, atžvilgiu pažymēti ξ, η, ζ, tai turēsime (brēž. 133, kame aiškumo deliai parodytos tik dvi koordinatų

ašys):

$$\xi = x - x_1;\ \eta = y - y_1;\ \zeta = z - z_1.$$

Taško P reliatyvus greitumas w P_1 atžvilgiu surandamas iš taško P absoliutinio greitumo v ir taško P_1 žengimo greitumo u sekančia geometrine sąlyga:

$$\bar{w} = \bar{v} - \bar{u},$$

kas analitiniai išreiškiama taip:

$$w_x = v_x - u_x, \text{ arba } \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}$$

$$w_y = v_y - u_y, \text{ arba } \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}$$

$$w_z = v_z - u_z, \text{ arba } \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}$$

Taško P reliatyvaus judėjimo atžvilgiu P_1 greitėjimas p_1 randamas iš taško P absoliutinio greitėjimo p ir taško P_1 žengimo judėjimo greitėjimo p_2 sekančia sąlyga:

$$\bar{p}_1 = \bar{p} - \bar{p}_2,$$

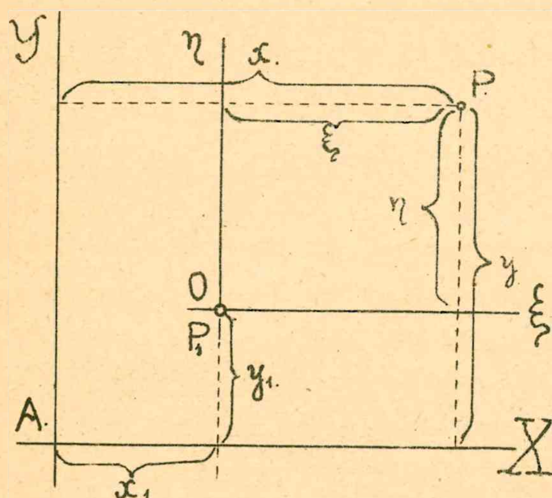
arba analitiniai:

$$p_{1x} = p_x - p_{2x}, \text{ arba: } \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2}$$

$$p_{1y} = p_y - p_{2y}, \text{ arba: } \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y_1}{dt^2}$$

$$p_{1z} = p_z - p_{2z}, \text{ arba: } \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2z_1}{dt^2}$$

P a v y z d i s. Du sunkūs taškai P ir P_1 sviesti tuo pačiu laiku vienoje vertikalinėje plokšmėje kampais α ir α_1 į horizontą su greitumais c ir c_1; rasti taško P reliatyvų judėjimą taško P_1 atžvilgiu, vadinasi, surasti, kaip atrodytų taško P judėjimas žiūrėtojui, esančiam taške P_1 judančiam drauge su juo žengimo judėjimu. Abiejų taškų koordinatos, kaip aukščiau matėme, išreiškiamos taip:



brėž. 133

$$x = c.\cos\alpha.t \qquad x_1 = c_1\cos\alpha_1.t$$

$$y = c.\sin\alpha.t - \frac{gt^2}{2} \qquad y_1 = c_1\sin\alpha_1.t - \frac{gt^2}{2}$$

Todel randame:

$$\xi = (c.\cos\alpha - c_1\cos\alpha_1)t = A.t, \text{ kame } A = \text{const.}$$

$$\eta = (c.\sin\alpha - c_1\sin\alpha_1)t = B.t, \text{ kame } B = \text{const.}$$

$$w_x = c.\cos\alpha - c_1\cos\alpha_1 = A$$ iš čia matome, kad

$$w_y = c.\sin\alpha - c_1\sin\alpha_1 = B \qquad \overline{w} = \overline{c} - \overline{c}_1$$

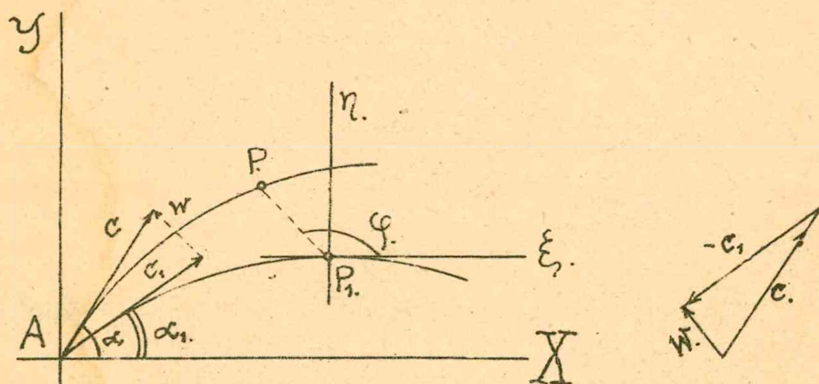
$$p_{1x} = 0, \quad p_{1y} = 0 \qquad \text{vadinasi } p_1 = 0.$$

Tokiu būdu taškas P tolsta nuo taško P_1 vienodu greitumu w pastovia kryptimi, sudarančia su ašimi AX arba $P_1\xi$ kampą φ, kuriam:

$$tg\varphi = \frac{w_y}{w_x} = \frac{B}{A} = const.$$

RELIATYVUS (MATOMAS) JUDĖJIMAS SISTĖMOS, JUDANČIOS BET KAIP, ATŽVILGIU.

Šiame atsitikime už žengimo judėjimo greitumą u ir greitėjimą p_2 reikia imti tojo judamos sistėmos taško greitumą ir greitėjimą, su kuriuo imtame mo-



brėž. 134

mente sutampa taškas arba kūnas, kurio reliatyvus judėjimas ieškomas. Čia, kaip matėme, tinka sekančiosios geometrinės lygybės:

$$\overline{v_{abs.}} = \overline{w_{rel.}} + \overline{u_{transl.}} \quad \text{ir:}$$

$$\overline{p_{abs.}} = \overline{p_{1rel.}} + \overline{p_{2transl.}} + \overline{p_{3pasuk.}}$$

Iš čia gauname reiškinius ieškomiems $w_{rel.}$ ir $p_{1rel.}$:

$$\overline{w_{rel.}} = \overline{v_{abs.}} + \overline{(-u)_{transl.}} \text{ ir:}$$

$$\overline{p_{1rel.}} = \overline{p_{abs.}} + \overline{(-p_2)_{transl.}} + \overline{(-p_3)_{pasuk.}}$$

P a v y z d i s. Išilgai nejudamos horizontalinės tiesiosios MN (brėž. 135) juda taškas A pastoviu greitumu v, nukreiptu nuo M į N. Tiesioginiai po tiesiosios MN randasi gulsčias plokščias diskas Q,

brėž. 135

kuris sukasi apie tašką M, kaipo nejudamą centrą, prieš laikrodžio rodikle pastoviu kampiniu greitumu ω. Rasti taško A reliatyvų judėjimą disko Q atžvilgiu, arba pėdsaką, taško A paliekamą besi-

sukančio disko Q plokšmēje. Analitiniai klausimas išsprendžiamas gana paprastai: skaitant laiką t nuo momento, kada judantysis taškas A buvo vietoje M, rasime, kad jo nuotolis MA = r laike t bus: r = v.t, kampas gi θ, ant kurio tuo pačiu laiku pasisuko kairēn diskas Q nejudamos tiesiosios MN atžvilgiu, bus: θ = ω.t. Todel, jeigu įsivaizdinsime stebētoją, stovintį ant disko, su kuriuo surišta judamoji sistēma Mξ, Mη, tai jam tiesioji MN suksis dešinēn kampiniu greitumu ω, o taškas A aprašys diske Archimedo spirale, išreiškiamą poliarinēse koordinatose sekančiomis lygtimis:

$$r = v.t; \quad \theta = \omega.t,$$

iš kur, pašaline t, gausime tosios spiralēs lygtis:

$$r = \frac{v}{\omega}.\theta.$$

Taško A aprašomoji diske Q traektorija tolygi taško A, tolygiai slenkančio išilgai spindulio MN (brēž. 130), kuris sukasi nejudamame diske, traektorijai; tiktai x pakeistas r ir taško A slenkimo spinduliu greitumas tenai buvo pažymētas w, o čia v, ir atvirkščiai. Reliatyviai traektorijai arba Archimedo spiralei liečiamoji taško A reliatyvus greitumas surandamas, kaipo geometrinē absoliutinio greitumo v ir disko taško A atbulo transliacijos judējimo: (-u) = +rω suma, sulig formulos:

$$\bar{w} = \bar{v}+(\overline{-u}), \quad o \quad tg\gamma_1 = \frac{r.\omega}{v}.$$

Kad suradus taško A reliatyvaus judējimo Archime-

do spirale greitējimą p_1, pastebēsime, kad $p_{abs.}$ = = 0, nes taško A absoliutinis judējimas tiesiąja MN yra tolyginis;

$$p_2 = \frac{u^2}{r} = r\omega^2$$

ir nukreiptas į centrą M, vadinasi $-p_2 = -r\omega^2$ ir nukreiptas nuo centro M į disko apskritimą; p_3 = $= 2w.\omega$ ir pasuktas prieš laikrodžio rodiklį (kaip ω) nuo w 90°, reiškia $(-p_3) = +2w.\omega$ turi priešingos pakraipos; supadimas p_1 vyksta sulig formulos:

$$\overline{p_1} = \overline{(-p_2)} + \overline{(-p_3)}.$$

Nesunku parodyti, kad gautasis greitējimas p_1 (brēž. 135) bus tolygus p brēž. 131 didumu ir kryptimi, jeigu x pakeisti į r ir perstatyti v su w vieną į kito vietą. Tikrai, dapilde greitējimų trikampį A'C'D' iki stataus trikampio A'B'C' ir palygine jį su greitumų trikampiu ABC, mes matome, kad jų kraštinēs viena kitai statmenos, vadinasi, tie trikampiai panašūs, o todel:

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC} \quad \text{arba:} \quad \frac{A'B'}{2w.\omega} = \frac{v}{w},$$

iš kur: $A'B' = 2v.\omega$;

panašiai: $$\frac{B'C'}{A'C'} = \frac{BC}{AC} \quad \text{arba:} \quad \frac{B'C'}{2w.\omega} = \frac{r\omega}{w},$$

iš kur: $B'C' = 2r\omega^2$;

todel $B'D' = r\omega^2$,

reiškia $p_1 = \sqrt{(2v\omega)^2 + (r\omega^2)^2}$,

tas pats, kas gauta brēž. 131. Toliau, atidēje kraštinēs BA pratesime AD = AB = v (brēž. 135), randame:

$$\operatorname{tg} BCD = \frac{2v}{r\omega}; \quad \operatorname{tg} A'D'B' = \frac{2v.\omega}{r\omega^2} = \frac{2v}{r\omega};$$

todel $\angle BCD = \angle A'D'B'$ arba $\rho_1 \perp CD$, kaip kad buvo brēžinyje 131.

* * *

Prof. P. Jaškauskas

12. III. 1926.

P, M – apie koord. pradžią.

$M_x = Zy - Yz$ X, Y, Z yra jėgos P komponentės koord. ašių atžvilgiu

$M_y = Xz - Zx$

$M_z = Yx - Xy$ x, y, z – jėgos P prid. taško koordinatės. (l projekcijos į koord. ašis)

$[a[bc]] = b(ac) + c(ab)$

